ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA A PARTIR DA EXPLICITAÇÃO DOS PRINCÍPIOS INVARIANTES

Alina Galvão **Spinillo,** UFPE, alinaspinillo@hotmail.com

RESUMO

Este artigo discute o ensino e a aprendizagem da matemática a partir de situações de resolução de problemas em que os princípios invariantes de conceitos matemáticos são explicitamente mencionados para as crianças. Duas pesquisas são apresentadas. A primeira é um estudo de intervenção em que crianças com dificuldades com a divisão resolviam problemas em que os princípios invariantes da divisão eram explicitados. Os dados mostraram que as crianças foram capazes de superar as dificuldades iniciais observadas. Na segunda pesquisa as crianças resolviam problemas de Produto Cartesiano em duas situações distintas. Em uma situação os princípios que governam o raciocínio combinatório estavam explicitamente mencionados e na outra estavam implícitos. Observou-se que as crianças resolviam com sucesso os problemas quando os princípios invariantes estavam explicitamente mencionados e que aplicavam esses princípios a situações em que eles estavam implícitos. Esses resultados apresentam implicações relevantes para o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental.
Palavras-chave: crianças, princípios invariantes, conceitos matemáticos.

ABSTRACT

This paper discusses the teaching and learning of mathematics based on problem-solving situations in which the invariant principles underlying mathematic concepts were made explicit to children. Two research studies were presented. The first was an intervention study in which children with difficulties with division solved word problems in which the invariant principles underlying the concept of division were made explicit to them. The results showed that they were able to overcome the difficulties they initially experienced. In the second research children solved Cartesian Product problems under two different situations. In one situation the principles governing combinatorial reasoning were explicitly mentioned while in the other these principles were implicit. It was found that children can successfully solve combinatorial problems in which the invariant principles are explicitly mentioned and that they applied these principles in other situations in which they were implicit. These findings have implications for the teaching of elementary school mathematics.
Keywords: children, invariant principles, mathematic concepts.

Com vistas a desenvolver situações didáticas que promovam uma compreensão efetiva dos conceitos matemáticos mais do que uma compreensão algorítmica que se volte essencialmente para a aplicação de procedimentos de cálculo, professores do ensino fundamental propõem atividades contextualmente significativas em sala de aula (baseadas em situações do cotidiano, por exemplo) em que é frequente a manipulação de material concreto e o uso de representações diversas; bem como promovem sequencias didáticas que, por exemplo, se iniciam por situações mais simples até que, gradativamente, se tornem cada vez mais complexas. Sem dúvida, tais atividades são apropriadas; contudo, para uma abordagem conceitual da matemática é necessário ainda considerar outros aspectos como, por exemplo, a natureza e características do conceito que se deseja ensinar. Segundo Vergnaud (1990, 1997, 2003), uma compreensão psicológica dos conceitos matemáticos requer considerar (além dos esquemas de ação, das situações de uso e dos suportes de representação), os invariantes lógicos que dizem respeito à natureza do conceito.

Como promover uma compreensão psicológica dos conceitos matemáticos? Como considerar os princípios invariantes que constituem os conceitos que a escola deseja ensinar? Uma possibilidade, dentre outras, é propor situações que coloquem os invariantes em evidência, explicitando-os para o aprendiz.

Assim, o presente artigo tem por objetivo refletir a respeito desta possibilidade, fornecendo exemplos de pesquisas que ilustram situações em que os princípios invariantes que regem o raciocínio a respeito dos conceitos matemáticos são colocados em evidência. Para tal, são brevemente descritas e discutidas duas investigações realizadas com alunos de anos iniciais do ensino fundamental: uma sobre a resolução de problemas de divisão e outra sobre a resolução de problemas de produto cartesiano. Ambas as pesquisas, a partir de contextos metodológicos distintos, buscam criar situações que favoreçam a compreensão de crianças acerca de conceitos complexos, a partir da explicitação dos princípios invariantes que governam esses conceitos.

A resolução de problemas de divisão inexata a partir da explicitação dos princípios invariantes

De acordo com a literatura na área (Nunes & Bryant, 1997; Nunes, Campos, Magina & Bryant, 2005), os invariantes lógicos presentes na organização das ações dos indivíduos ao lidar com o conceito de divisão são: (i) o todo deve ser distribuído em partes iguais; (ii) o todo deve ser distribuído exaustivamente até que não seja possível uma nova rodada de distribuição de seus elementos; (iii) o todo inicial é constituído pelo número de partes multiplicado pelo tamanho das partes mais o resto; (iv) relação inversa entre o tamanho das partes e o número de partes em que o todo foi dividido; e (v) o resto não pode ser maior nem igual ao tamanho das partes ou ao número de partes em que o todo foi dividido. Importante mencionar que muitas das dificuldades das crianças decorrem de uma incompreensão acerca das relações inversas entre os termos da divisão (e.g., Correa, Nunes & Bryant, 1998) e de uma incompreensão acerca de como lidar com o resto (e.g., Silver, 1988; Silver, Shapiro & Deutsch,1993).

Sendo assim, parece importante investigar se a explicitação dos princípios invariantes da divisão auxiliaria na resolução de problemas de divisão inexata. Dois princípios invariantes, relacionados às dificuldades das crianças na resolução de problemas de divisão, foram considerados: o papel do resto e as relações inversas entre os termos da divisão.

Lautert e Spinillo (2006) e Lautert, Spinillo e Correa (2012) realizaram um estudo de intervenção com alunos do 4º ano do ensino fundamental que apresentavam dificuldades com a divisão. O objetivo era auxiliar as crianças a compreender as relações inversas entre os termos da divisão; e a lidar com o resto de modo apropriado. O estudo consistia em um pré-teste e um pós-teste, um grupo controle e um grupo experimental. O grupo controle era constituído por crianças que continuaram apenas com as aulas regulares oferecidas pela escola; enquanto que as crianças do grupo experimental, além das aulas regulares, participaram de uma intervenção individual voltada para os princípios invariantes da divisão acerca da relação inversa entre os termos (número de partes e o tamanho das partes) e acerca do significado do resto durante o procedimento de resolução de problemas de divisão inexata.

Durante a intervenção, a explicitação das relações inversas entre o tamanho das partes e o número de partes foi feita a partir de variações sobre um problema de base que era apresentado. As variações envolviam aumentar ou diminuir o tamanho ou o número de partes, mantendo-se o dividendo constante; como ilustrado a seguir:

Exemplo 1: refletindo sobre as relações inversas

Problema de base: Paulo comprou 24 piões e quer colocá-los em 4 caixas. Ele quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de piões. Quantos piões ficarão em cada caixa?

Variação 1: aumento do divisor e diminuição do tamanho das partes

> Paulo resolveu aumentar o número de caixas. Ele não quer colocar mais os piões em 4 caixas. Ele quer colocá-los agora em 6 caixas. Veja que aumentou o número de caixas. Antes eram 4 caixas e agora são 6 caixas. A quantidade de piões dentro das caixas vai aumentar ou diminuir? Por quê?

Variação 2: diminuição do divisor e aumento do tamanho das partes

> Paulo resolveu diminuir o número de caixas. Ele não quer colocar mais os piões em 6 caixas. Ele quer colocá-los agora em 2 caixas. Veja que diminuiu o número de caixas. Antes eram 6 caixas e agora são 2 caixas. A quantidade de piões dentro das caixas vai aumentar ou diminuir? Por quê?

Durante a intervenção, a explicitação acerca do significado do resto também foi feita a partir de variações sobre um problema de base que era apresentado. As variações envolviam aumentar ou diminuir o tamanho do resto de modo a levar a criança a compreender que ao alterar o valor do resto alteravam-se também os valores dos demais termos; como ilustrado a seguir:

Exemplo 2: refletindo sobre o significado do resto

Problema de base: Ana comprou 22 botões e quer colocá-los em 4 caixas. Ela quer que cada caixa tenha a mesma quantidade de botões. Quantos botões ficarão em cada caixa?

Variação 1: aumento do resto, re-distribuição dos elementos, obtendo-se resto igual a um

E se a gente der mais 3 botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas? Muda a resolução do problema? O que muda na resolução?

Variação 2: aumento do resto, re-distribuição dos elementos, obtendo-se resto maior que um

E se a gente der mais 5 botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas? Muda a resolução do problema? O que muda na resolução?

Variação 3: aumento do resto, re-distribuição dos elementos, obtendo-se resto igual a zero

E se a gente der dois botões para Ana, como ficará a divisão dos botões nas caixas? Muda a resolução do problema? O que muda na resolução?

De modo geral, houve um avanço expressivo entre as crianças do grupo experimental, tanto em termos de desempenho quanto em termos de uma compreensão sobre os invariantes; o mesmo não ocorrendo com as crianças do grupo controle que permaneceram com as mesmas dificuldades identificadas no pré-teste. Concluiu-se que a explicitação dos invariantes da divisão durante a intervenção facilitou a compreensão acerca deste conceito.

Importante comentar que a intervenção teve um efeito mais efetivo sobre as dificuldades em lidar com o resto do que sobre a dificuldade de compreender as relações inversas entre os termos da divisão. Parece que compreender essas relações é algo mais difícil de ser alcançado do que compreender o papel do resto que é mais facilmente colocado em evidência durante o diálogo estabelecido entre a eliminadora e a criança durante a intervenção.

A resolução de problemas de produto cartesiano a partir da explicitação dos princípios invariantes

Mekhmandarov (2000) apresenta quatro princípios básicos que regem o raciocínio combinatório, os quais precisam ser considerados na resolução de problemas de produto cartesiano: (i) cada combinação é formada apenas com um item de cada um dos dois conjuntos elementares, (ii) cada combinação formada é um elemento do novo conjunto produto, (iii) cada elemento dos conjuntos elementares pode aparecer em diversas combinações (correspondência um-para-muitos), e (iv) cada combinação deve aparecer apenas uma vez no conjunto produto.

Analisando-se as pesquisas na área, nota-se que esses princípios, em especial a correspondência um-para-muitos, estão implícitos nos problemas de produto cartesiano usualmente apresentados às crianças, como comentam Nunes e Bryant (1997), Eizenberg e Zaslavsky (2003) e Nesher (1988). O fato desses princípios estarem implícitos pode gerar dificuldades de compreensão que impeçam a solução apropriada dos problemas.

Diante disso, parece ser relevante examinar se tornar estes princípios explícitos facilitaria a compreensão e a resolução de problemas de produto cartesiano. Para testar esta possibilidade, foi realizada uma pesquisa em que se comparou o desempenho de crianças em duas situações de solução de problemas de produto cartesiano: uma em que estes princípios estavam implícitos e outra em que estes princípios estavam claramente mencionados (Spinillo e Silva, 2010).

Participaram do estudo alunos do 3º ano do ensino fundamental, com idade média de oito anos. Os participantes foram individualmente solicitados a resolver problemas de produto cartesiano, usando lápis e papel, em duas situações.

Na Situação 1 a correspondência um-para-muitos estava implícita: “Pedro tem 3 camisetas (azul, amarela e verde) e 5 bermudas (vermelha, laranja, preta, marrom e branca). Ele quer combinar as camisetas e as bermudas para formar conjuntos. Quantos conjuntos diferentes ele pode formar?”

Na Situação 2 a correspondência um-para-muitos e os demais princípios apontados por Mekhmandarov (2000) estavam explícitos no enunciado dos problemas: “Pedro vai viajar para casa do seu avô. Na mala ele colocou 3 calças (preta, marrom, e azul) e 5 camisas (amarela, vermelha, verde, laranja e cinza). Ele pode combinar as calças e as camisas para formar conjuntos. Mas ninguém veste todas as calças e todas as camisas de uma só vez; só usa uma calça e uma camisa de cada vez, não é? Combinando as camisas com as calças, ele pode ter conjuntos diferentes, não pode? Nessa viagem, Pedro quer usar uma roupa diferente a cada dia, ele não quer repetir os conjuntos. Por exemplo, um dia ele pode usar a calça preta com a camisa laranja. No outro dia ele pode usar a mesma calça preta com a camisa cinza, já seria uma roupa diferente, não seria? Combinando todas as calças com todas as camisas, quantos conjuntos diferentes Pedro pode formar?”

Metade dos participantes resolveu os problemas da Situação 1 na primeira sessão e os problemas da Situação 2 na segunda sessão; e a outra metade resolveu os problemas da Situação 2 na primeira sessão e os da Situação 1 na segunda sessão.

Os dados foram analisados em função do número de acertos e das estratégias de resolução adotadas. As estratégias envolviam soluções não combinatórias; combinações por pares fixos baseados na correspondência termo-a-termo; combinações mais flexíveis que indicavam o início de correspondência um-para-muitos; e soluções combinatórias (ver Moro e Soares, 2004). Observou-se que o desempenho era melhor na Situação 2 do que na Situação 1, e que as estratégias de resolução mais apropriadas (início de correspondência um-para-muitos e soluções efetivamente combinatórias) eram mais frequentes na Situação 2 (explícita) do que na Situação 1 (implícita). Este resultado mostrou que a explicitação dos princípios invariantes teve um efeito positivo sobre a forma de resolver os problemas.

Além deste resultado, observou-se um efeito de ordem muito interessante: as crianças que resolviam os problemas da Situação 2 (explícita) na primeira sessão e os problemas da Situação 1 (implícita) na segunda sessão tinham um melhor desempenho na Situação 1 (implícita) do que as crianças que resolviam a Situação 1 (implícita) na primeira sessão. Esse resultado indica que a Situação 2 (explícita) favorecia a resolução dos problemas da Situação 1 (implícita).

A principal conclusão desta pesquisa foi que as crianças se beneficiaram da situação em que os princípios do raciocínio combinatório eram explicitados, sendo capazes, ainda de aplicá-los a situações em que tais princípios estavam implícitos. Do ponto de vista educacional, este resultado tem implicações didáticas importantes, como discutido adiante.

Comentários finais

As investigações acima apresentadas e discutidas podem ser entendidas como situações que favorecem a compreensão acerca de conceitos matemáticos complexos que, como apontado na literatura na área e comentado por professores, dificilmente são compreendidos por crianças alunas de anos iniciais do ensino fundamental. Segundo nossa análise, um dos fatores que contribuiu de forma expressiva para esta compreensão foi a explicitação dos invariantes relativos a esses conceitos. Pelo exposto, os invariantes podem ser entendidos como instâncias definidoras dos conceitos, instâncias essas que precisam ser consideradas nas situações de ensino. Essa é, sem dúvida, o que se entende por uma abordagem conceitual do processo de ensino-aprendizagem. Embora esta abordagem tenha sido, como ilustrado, aplicada a situações controladas de pesquisa, acredita-se que seja possível adaptar essas situações para o contexto escolar. Por exemplo, o professor poderia propor situações de ensino que colocassem em evidência os invariantes do conceito que deseja ensinar; partindo da idéia de que tais invariantes podem ser objeto de reflexão durante o processo de resolução de situações-problema que envolvem aquele conceito. Como pesquisa futura, seria interessante testar a eficácia de um programa de ensino, baseado em sequências didáticas, em que situações como aquelas aqui ilustradas fossem organizadas e propostas em sala de aula.

Importante comentar que diante dos dados aqui apresentados é possível pensar: (i) que o ensino introdutório da divisão poderia envolver divisão inexata, refletindo-se acerca do papel do resto; e (ii) que a resolução de problemas de produto de medidas poderia iniciar-se mais cedo do que usualmente ocorre na escola, contudo inserida em situações em que fossem explicitados os princípios que constituem o raciocínio combinatório, em especial a correspondência um-para-muitos.

Para concluir, ressalta-se que toda aprendizagem ocorre sobre algo, sendo necessário considerar os domínios específicos do conhecimento nas situações de ensino (Da Rocha Falcão, 2003). Em sendo assim, é possível compreender os invariantes como instâncias definidoras dos conceitos, sendo específicas a um conceito e variando de um conceito a outro; e, ainda, relacionadas a formas de operar sobre as situações em que um dado conceito se insere. Portanto, tais especificidades precisam ser consideradas nas situações de ensino e aprendizagem quer na sala de aula quer em situações de pesquisa que visam compreender e desenvolver o raciocínio matemático de crianças.

Referências

CORREA, J.; NUNES, T. & BRYANT, P. (1998). Young children's understanding of division: the relationship between division terms in a non-computational task. *Journal of Educational Psychology*, v. 90, n. 2, p. 321-329, 1998.

DA ROCHA FALCÃO, J.T. *Psicologia da educação matemática: uma introdução*. Belo Horizonte: Autêntica. 2003

EIZENBERG, M. M.; ZASLAVSKY, O. Cooperative problem solving in combinatorics:

the inter-relations between control processes and successful solutions. Journal of Mathematical Behavior, v. 22, p. 389-403, 2003.
LAUTERT, S. L.; SPINILLO, A. G. Exploring the role played by the remainder in the solution of division problems. In: Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Praga: Czech Republic, v. 5, p. 153-160, 2006a.
LAUTERT, S.L.; SPINILLO, A.G. & CORREA, J. Children´s difficulties with division: an intervention study. Educational Research, v. 3, n. 5, p. 447-456, 2012.
MEKHMANDAROV, I. Analysis and Synthesis of the Cartesian product by kindergarten children. In: Proceedings of the 24th Annual International Conference of Psychology of Mathematics. Hiroshima: Japão, v.3, p.295-301, 2000.
MORO, M. L. F.; SOARES, M. T. C. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. Revista Educação Matemática e Pesquisa, São Paulo, v.8, n. 1, p. 99-124, 2006.
NESHER, P. Multiplicative school word problems: Theoretical approaches and empirical findings. In: J. HIEBERT; M. BEHR (Orgs.): Number concepts and operations in the middle grades (pp. 19-40). Hillsdale, NJ.: Lawrence Erlbaum Associates, 1988.
NUNES, T., CAMPOS, T. M. M., MAGINA, S.; BRYANT, P. Números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005
NUNES, T.; BRYANT, P. Crianças fazendo matemática. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.
SILVER E. A.; SHAPIRO, L. J.; DEUTSCH, A. Sense making and the solution of division problems involving remainders: an examination of middle school students' solution processes and their interpretations of solutions. Journal for Research in Mathematics Education, Estados Unidos da América, v. 24, n. 2, p.117- 135, 1993.
SILVER, E. A. Solving story problems involving division with remainders: the importance of semantic processing and referential mapping. In: Proceedings of the 10th Annual Meeting of the North American Chaper of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Dekalb, North Illinois University, p. 127-133, 1988.
SPINILLO, A. G. & SILVA, J. F. G. da. Making explicit the principles governing combinatorial reasoning: does it help children to solve cartesian product problems? In: *Proceedings of the 34rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Belo Horizonte, Minas Gerais, 216-224. 2010.
VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, v. 10, p. 133-171. 1990.
_______________ The nature of mathematical concepts. In: T. Nunes & P. Bryant (Eds.) *Learning and teaching mathematics: an international* perspective (pp. 5-28), Hove: Psychology Press. 1997.
______________ A gênese dos campos conceituais. In: E. P. Grossi (Org.), *Porque ainda há quem não aprende?: A teoria*. Petrópolis: Vozes. 2003.