



3º SIPEMAT

SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA



EXPLORAÇÃO DE UMA INVESTIGAÇÃO GEOMETRICA DE QUADRILÁTEROS COM USO DO GEOGEBRA

AUTORES

Pablo Charles de Oliveira **Melo**, UFPE, profpablo_charles@yahoo.com.br

Cícero Pinheiro dos **Santos Junior**, UFPE, ciceropinheiro_mat@yahoo.com.br

Emersson Rodrigues de **Souza**, UFPE, emersson_rodrigues@yahoo.com.br

RESUMO

Numa perspectiva de testar atividades no ensino da matemática, que possam contribuir de alguma maneira na aprendizagem de nossos alunos. Propomos a realizar investigações geométricas de quadriláteros. Utilizamos como recurso didático um *software* de Geometria Dinâmica no caso o Geogebra, analisando como ocorrem as etapas de investigação por parte dos alunos: exploração e formulação de questões, conjecturas, testes e reformulações, justificações e avaliações. A exploração foi feita com quatro alunos em diferentes níveis de ensino básico, oriundos de uma escola particular da região metropolitana do Recife e do curso integral de eletrônica do IFPE. A proposta de exploração da atividade foi planejada a partir do livro de Ponte, Brocardo, Oliveira (2006), mais especificamente Investigações Geométricas. Realizamos registro das atividades e analisamos os passos da exploração por parte dos alunos, mediadas pelas intervenções do professor. As atividades de investigação com uso do *software* Geogebra mostraram-se um diferencial instigador no tratamento da Geometria e da construção do pensamento matemático por parte do aluno. Outro ponto a ser considerado é que mesmo que as atividades tenham tomado um tempo maior do que o previsto percebeu-se que o processo de investigação, aliado ao uso do *software*, permitiu uma atitude mais crítica dos alunos nas respectivas construções.

Palavras chaves: Investigação Geométrica, Ensino de Matemática, Geogebra.

ABSTRACT

In a perspective of testing activities in mathematics teaching, which may contribute in some way on the learning of our students. We propose to conduct quadrilaterals geometric investigations. We used as a didactic resource the *software* Dynamic Geometry in the case Geogebra, analyzing how the stages of research occur from the students: exploration and the formulation of questions, conjectures, tests and reformulations, justifications and evaluations. The exploration was done with four students in different levels of basic education, from a private school in the metropolitan area of Recife and and of the entire course of electronic of the IFPE. The proposal for a exploration activity was planned from the book by Ponte, Brocardo, Oliveira (2006) more specifically Geometric Investigations. We performed the registry of the activities and we analyzed the steps of exploration by the students, handled through the teacher interventions. The investigation activities with the use of GeoGebra *software* showed to be a differential instigator in the treatment of geometry and



construction of mathematical thought from the student. Another point to be considered is that even though the activities had taken a longer time than planned we noticed that the investigation process, coupled with the use of the software allowed a more critical position of students in their respective constructions.

Keywords: Geometric Research, teaching of mathematics, Geogebra.

1 Investigações Matemáticas.

Ao analisar a atual educação e mais precisamente o modo com que se desenvolve o processo de construção de conhecimentos com alunos, nos deparamos com uma grande defasagem do ensino e com o método tradicional de se dar aula, principalmente quando os conteúdos a serem trabalhados são de matemática e particularmente da geometria. Em um modelo de ensino em que os alunos não são incentivados a pensar e a serem sujeitos ativos nesse processo, mas sim meros depósitos de informação, que lhes são transmitidas de qualquer maneira e na maioria das vezes de maneira mecânica, onde o ato de decorar fórmulas, gráficos, tabelas, entre outros, torna-se comum e usual.

Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2006), o conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor.

Para Toledo e Toledo (1997), uma pergunta é comum entre os alunos: “para que eu preciso estudar matemática?”. Essa não tem sido respondida de maneira correta, pois exceto algumas questões de troco, pagamento e compras, esta disciplina não tem sido transmitida em sua essência, mas apenas como uma lista de exercícios e problemas-tipo que devem ser resolvidos pelo aluno que deve necessariamente chegar ao resultado que o professor espera. Sendo assim, grande parte dos conteúdos, continuam sendo tratados de modo totalmente desligado dos outros conteúdos escolares e da vida fora da escola do aluno. Não se estabelece desta maneira, o vínculo tão importante no aprendizado entre a teoria estudada e a prática do que foi aprendido através das situações vivenciadas pelos estudantes.

Ponte, Brocado e Oliveira (2006) defendem que na disciplina de matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos



fortes das investigações. Ao requerer a participação do aluno na formulação das questões a estudar, essa atividade tende a favorecer o seu envolvimento na aprendizagem.

Diante de todo o avanço tecnológico é primordial se repensar qual o objetivo da matemática, pois esta não mais deve ser estudada de maneira mecânica, já que se antes era necessário fazer contas rápidas e corretamente, hoje é importante saber por que os algoritmos funcionam, quais são as ideias e os conceitos neles envolvidos.

No ensino, o trabalhar com Investigações Matemáticas constitui uma das atividades que os alunos podem realizar e que se relacionam, de muito perto, com a resolução de problemas. Assim, ao iniciar a investigação, é importante também que o aluno saiba o que lhe é pedido, em termos de produto final.

2 As Investigações no ensino da Geometria.

O ensino da matemática nas escolas tem ocorrido de maneira desvinculada da realidade. Um teorema é ensinado seguindo o esquema: enunciado, demonstração e aplicação, quando a melhor forma seria a maneira inversa (a mesma que deu origem ao teorema), sendo primeira sua motivação, a formulação de hipóteses, a validação das hipóteses e novos questionamentos e por fim seu enunciado. Assim estaríamos chegando ao objetivo tão perseguido pela modelagem que é o binômio ensino–aprendizagem reinventando o resultado juntamente com os alunos.

Na disciplina de Matemática, como em qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. (PONTE, BROCADO e OLIVEIRA 2006, p.23).

O ensino e aprendizagem de Geometria têm sido alvo de preocupação dos educadores e professores, principalmente quanto aos conteúdos trabalhados em sala de aula.

Percebemos também que de modo geral existem recomendações curriculares para o ensino da Geometria, porém o movimento da matemática moderna que destacava o papel da Geometria para ilustrar o caráter dedutivo e axiomático da matemática e desvalorizava os aspectos ligados à observação, à experimentação e à construção.

A tendência de revalorização da geometria nos últimos anos tem marcado a evolução curricular em Matemática por todo o mundo, com reflexos visíveis em Portugal.

Alguns resultados de pesquisas da Educação Matemática para o ensino de Geometria apontam na direção do uso de materiais concretos e da informática para exploração de atividades, que facilitam o entendimento de conceitos geométricos e suas



aplicações.

A geometria parece ser dentro da Matemática escolar, uma área particularmente propícia à realização de atividades de natureza exploratória e investigativa. Assim, algumas discussões nos levam a questionamentos implícitos sobre o que é a geometria e qual é o seu papel na aprendizagem da Matemática.

Segundo Ponte, Brocado e Oliveira (2006), a utilização de programas de Geometria Dinâmica, é uma opção curricular atualmente bastante enfatizada. Esse suporte tecnológico permite o desenho, a manipulação e a construção de objetos geométricos, facilita a exploração de conjecturas e a investigação de relações que precedem o uso do raciocínio formal. Vários estudos empíricos destacam também que, na realização de investigações, a utilização dessas ferramentas facilita a recolha de dados e o teste de conjecturas, apoiando, desse modo, explorações mais organizadas e completas e permitindo que os alunos se concentrem nas decisões em termos de processo.

Fazendo apelo à intuição e à visualização e recorrendo, com naturalidade, à manipulação de materiais, a geometria torna-se, talvez mais do que qualquer outro domínio da Matemática, especialmente propícia a um ensino fortemente baseado na realização de descobertas e na resolução de problemas, desde os níveis escolares mais elementares. Na geometria, há um imenso campo para a escolha de tarefas de natureza exploratória e investigativa, que podem ser desenvolvidas na sala de aula, sem necessidade de um grande número de pré-requisitos e evitando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos e em “receitas” para resolver exercícios-tipo. Assim, riqueza e variedade da geometria constituem, de fato, argumentos muito fortes para a sua valorização no currículo e nas aulas de Matemática.

Como base para aplicação deste estudo exploratório investigativo foi selecionado software de Geometria dinâmica, o *Geogebra* por ser um “*software* livre” e pela interface de fácil manipulação, interação e visualização, e ainda, por ter características de simulação na exploração de atividades matemáticas.

Segundo Bellemain, Gitirana, Baltar (2006) as situações de simulação são a prerrogativa que favorecem o uso destes softwares por parte dos alunos, permitindo a exploração das construções por eles elaboradas.

O Geogebra pode facilitar a realização da investigação no momento em que questões precisam ser levantadas e testadas de forma simulada e as dificuldades com as ferramentas usuais nesta simulação poderiam ser um entrave no tempo e na construção das conjecturas.



3 Descrição Metodológica no ensino da Investigação.

Foi escolhida uma amostra de quatro alunos, os alunos A, B e C de uma escola particular da região metropolitana do Recife, na cidade de Jaboatão dos Guararapes respectivamente do 9º ano do ensino fundamental, 1º e 3º do ensino médio, e o aluno D do IFPE (Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco) do 4º período do curso integral de eletrônica (ensino médio e técnico). Consideramos que a amostra traz possibilidades de análise do comportamento diante da investigação em diferentes níveis compreensão, resolução e adaptação nas questões relativas às situações didáticas apresentadas. Levantaremos neste caso apenas o uma análise do desenvolvimento das atividades por parte dos alunos, as impressões sobre as mesmas, os registros escritos e salvos.

Para adaptação ao software Geogebra e revisão do tema *quadriláteros*, utilizamos por base as atividades do trabalho realizado por Câmara dos Santos (2009). Escolhemos para atividade de investigações os exemplos propostos no livro de João Pedro da Ponte (2006): *Investigações matemáticas na sala de aula*, especificamente as páginas 85 e 89 quadros 9 e 11, quadriláteros e pontos médios e quadriláteros e diagonais. No teste piloto não foi possível realizar a investigação quadriláteros e diagonais, deixamos para outra pesquisa.

Foi disponibilizado um computador para cada aluno, num laboratório de informática, com o software instalado e pronto para ser utilizado nas questões propostas e ainda material para impressão e escrita para que fossem realizados registros escritos sobre as atividades. A dinâmica propunha que alunos a principio trabalhassem sozinhos, mas que poderiam dialogar entre eles, com o objetivo de ampliar as discussões e propiciar um ambiente colaborativo nas atividades. Os alunos foram instruídos inicialmente nas ferramentas básicas do Geogebra: construção de retas com dois pontos dados, segmento de reta, paralelas, perpendiculares, ponto médio, transporte de segmento (circunferência), ângulo, ângulo com uma medida fixa, medidas de segmentos e ângulos. Ficaram livres para utilizar todas as ferramentas disponíveis no software. O objetivo do recurso era dinamizar a atividade de investigação.

As etapas de investigação foram divididas em quatro aulas de 50 minutos. Na 1ª e 2ª aulas os alunos tiveram contato com o Geogebra e realizaram atividades de adaptação e reconhecimento das principais ferramentas que poderiam ser usadas bem como revisaram propriedades dos quadriláteros. Na 3ª e 4ª aulas os alunos começaram a atividade de investigação com exploração da questão, anotaram, em papel observações e conjecturas durante as quatro aulas, gravaram arquivos relativos às construções.



O papel do professor foi de conduzir as atividades de forma organizada e motivadora. Instigar os alunos a construírem as conjecturas, contribuir para uma melhor adaptação a ferramenta, conduzir para um melhor pensamento matemático como objetivo das investigações. O professor torna-se fundamental na realização da investigação, por criar um ambiente adequado, desafiador e estimulante. O professor precisa estar atento aos progressos dos alunos e ao raciocínio matemático usado por eles.

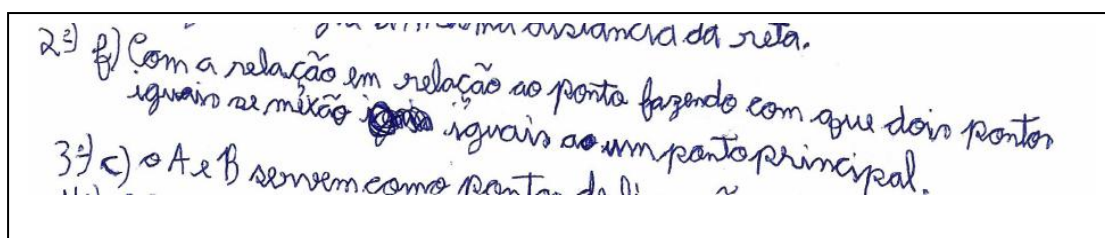
4 Momento de exploração das atividades.

Neste momento destacamos alguns fragmentos dos registros realizados pelos alunos durante as atividades e analisamos cada fragmento a partir da perspectiva de uma investigação geométrica como proposto em Ponte, Brocado e Oliveira (2006), considerando que estas investigações possam contribuir para que os alunos percebam aspectos fundamentais da atividade matemática tais como: formulação, testes de conjecturas e a procura e demonstração de generalizações.

Nas primeiras duas aulas os alunos familiarizaram-se com o Geogebra resolvendo atividades de exploração das ferramentas básicas. Foi verificado após conversas informais que os mesmos possuíam níveis diferentes de uso do software e do conteúdo quadriláteros. Foram propostas construções de quadriláteros para lembrarem algumas propriedades básicas destas figuras, levantando a importância dos conhecimentos prévios na investigação proposta.

No decorrer das aulas percebemos que já estávamos em alguns momentos realizando investigação, apesar de que precisávamos intervir, mas diretamente na dificuldade apresentada em algumas construções básicas, como por exemplo, a do aluno A, quando diante da seguinte questão.

2ª) atividade: Simétrico de um ponto a outro na mesma reta, item f) Explique como construiu o ponto B, para que satisfaça a condição solicitada.



Quadro1: Registro de A

Este tenta descrever uma relação de simetria, ocorreu dificuldade em conjecturar de maneira explícita a ideia de que a distância de B a P é a mesma que a de P a A, mesmo



compreendendo nas experimentações e expondo oralmente para o professor esta relação. A dificuldade em escrever de forma mais clara uma relação que parece estar compreendida pelo aluno, foi uma constante nestes momentos.

Na construção dos quadriláteros foi pedido que os alunos justificassem as características principais de cada figura: paralelogramo; retângulo; quadrado; losango; trapézio e trapezoide. Ouve dificuldades nas construções das figuras, principalmente a do quadrado e losango. Intervirmos, pedindo para que destacassem as propriedades fundamentais de cada figura e usassem as ferramentas trabalhadas anteriormente. No paralelogramo tivemos os seguintes registros:

Após todos realizarem a construção usando segmentos paralelos, foram feitas medições de lados e ângulos, e construção das diagonais, como no exemplo do aluno A:

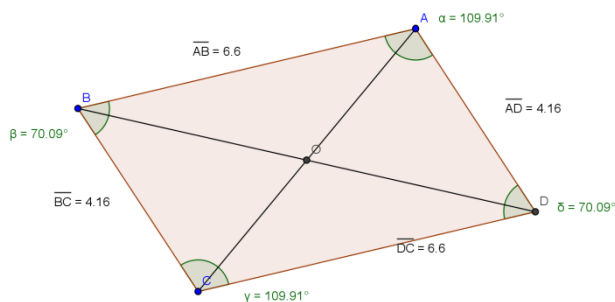


Figura 1: Construção do paralelogramo e diagonais

Logo depois o registro das propriedades verificadas por cada um.

Aluno A:

6º) Propriedades do paralelogramo:
Lados opostos iguais e paralelos.
Ângulos opostos iguais.
Diagonais se cruzam no centro.
7º) Ângulos de ...

Quadro 2: Registro de A sobre propriedades do quadrilátero

A sua conclusão sobre diagonais se cruzam no centro não foi verificada.

Aluno B:

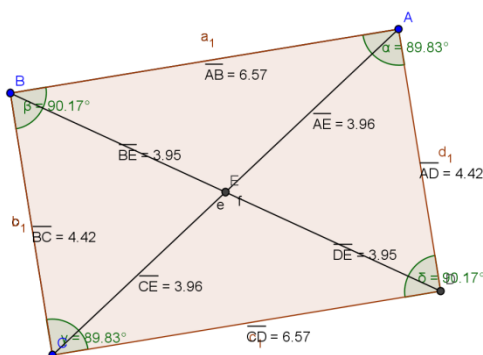


Figura 2: Verificação de propriedade do paralelogramo

Al Paralelogramo por mais que esse mecha de traçar com
tinhas paralelas por causa de seus segmentos opostos
e suas diagonais se cruzam no centro e o parale-
logramo possui 4 lados e 2 diagonais
ot-Ela é um ret?

Quadro 3: Registro de B sobre propriedades dos quadriláteros.

Comparando os registros dos Alunos A e B, o aluno B tenta descrever as propriedades do paralelogramo destacando a ferramenta dinâmica do Geogebra de mover e verificar o que muda ou não (o que é ou não invariável).

No momento em que começamos a investigação pretendida, os alunos já disponham de trabalho realizado com as ferramentas principais do Geogebra, bem como de propriedades dos quadriláteros, fundamentais na investigação. Destacamos que a investigação poderia ser realizada de forma imediata sem a necessidade de preparação prévia, podendo ser uma prática de exploração a ser trabalhada posteriormente numa outra pesquisa.

A primeira atividade: Quadriláteros e pontos médios.

1º) Construa um quadrilátero qualquer e o ponto médio de cada um dos lados. Em seguida, una os pontos médios dos lados consecutivos. Que tipo de quadrilátero obteve?

Os alunos agora estavam livres para investigar: explorar, formular conjecturas, testar e justificar. Observamos na primeira questão os seguintes registros.

Aluno A

1º) Lados opostos iguais, ângulos opostos iguais, logo é um paralelogramo.

Quadro 4: Registro de A formulando conjecturas.



Aluno D

1º) UM PARALELOGRAMO, POSSUI OS LADOS PARALELOS IGUAIS.

Quadro 5: Registro de D

Os alunos construíram as figuras considerando as investigações geométricas, primeiro montando as construções, formulando hipóteses para os possíveis erros e acertos nas construções, observando as propriedades de cada uma. Destacamos que todos os passos da investigação foram realizados naturalmente antes de concluírem suas conjecturas tentaram justificar suas construções.

Na segunda questão: Arraste um vértice do quadrilátero inicial. Diga o que acontece e tente justificar por quê.

Temos a seguinte figura construída e testada pelo aluno B

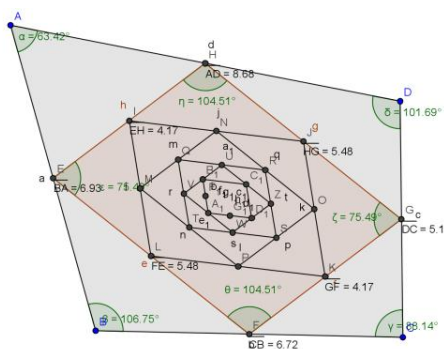


Figura 3: Construção de paralelogramos apartir dos pontos médios

2:) Continua a mesma figura (a de dentro) pois os lados opostos são proporcionais

Quadro 6: Registro de B

A uma tentativa de identificar a figura interna como paralelogramo usando construções e medições de alguns lados e ângulos.

Na terceira questão da primeira investigação: Agora o que acontece se o quadrilátero inicial for especial (quadrado, retângulo, losango, trapézio, paralelogramo). Consideramos



exaustivo para o momento realizar em todas as figuras então pedimos salvassem no paralelogramo.

Após construções e testes de hipóteses usando as medições dos lados e ângulos, destacamos:

Figura do Aluno A

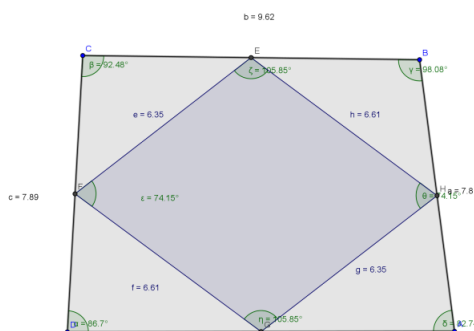


Figura 4: Quadrilátero incluído

Sua conclusão foi:

3^o) No retângulo e o losango, Paralelogramo era um ~~Paralelogramo~~,
~~Quadrado~~ Quadrado era um ~~Quadrado~~, Losango = retângulo.

Quadro 7: Registro de A

Neste ponto o Aluno A tenta justificar a partir da construção realizada o que ocorrerá em outras construções, mesmo sem verificar se as proposições são válidas.

5 Considerações.

No decorrer da construção deste trabalho, pode-se observar a evolução no trato dos conhecimentos matemáticos pertinentes as atividades. A percepção dos alunos sobre investigações matemática: exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulações e justificação e avaliação segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), foram de alguma maneira com mais ou menos rigor, construídas. A motivação em elaborar, eles mesmos, o próprio conhecimento sobre o tema tratado, atribui ao aluno o papel de agente. Todas as experimentações foram realizadas com o prazer da descoberta. O certo ou errado minimizou-se em prol do caminho percorrido no processo de aprendizagem.

Segundo Bellemain, Gitirana, Baltar (2006) uma simulação com um software de Geometria Dinâmica não se reduz ao estudo de uma figura em particular, ilustrando



3º SIPEMAT

SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA



propriedades ou construções para que possam ser exploradas. Caracterizam-se também pelos elementos que favorecem a exploração da simulação e a extração das observações mais importantes nesta atividade investigativa.

As atividades tomaram um tempo maior do que normalmente é planejado pelo professor e que em turmas maiores a sugestão seria a de montar equipes de trabalho e exposição dos resultados em forma de relatório com as devidas observações, o que corrobora com as investigações realizadas em Ponte, Brocado e Oliveira (2006). O trabalho individual como proposto neste trabalho em alguns momentos tornou-se cansativo tanto por não haver trocas de informações entre os alunos. Os registros escritos, apesar de dito pelos próprios alunos, que era parte mais “chata”, foram realizados com os devidos cuidados, sugerimos um trabalho com análise mais criteriosa dos mesmos num momento posterior.

Algumas das considerações propostas na construção dos quadriláteros, como a questão relativa à divisão da diagonal em partes iguais, sugere a questão “o que vale para um vale para todos” na proposta de que se é verdade para um caso particular pode-se provar para todos os casos, como sugerido em Ponte, Brocado e Oliveira (2006, p.85), instigando ainda mais aos alunos possíveis generalizações ou demonstrações. Neste aspecto o pensamento matemático é construído no decorrer da investigação, tornando-a ferramenta poderosa no aprendizado da matemática.

As atitudes perante as questões colocadas e as indagações postas durante o período de testes, corrobora para um maior aprofundamento de atividades de investigação. A ferramenta de geometria dinâmica, no caso Geogebra, mostrou-se bastante eficaz na dinâmica das atividades e proporcionou mais um diferencial atrativo, além de instigar uma atitude mais crítica, por parte dos alunos, nas respectivas construções geométricas.

Os estudos das atividades exploratórias com as ferramentas básicas do Geogebra tornaram-se parte das atividades de investigação, pois os questionamentos e geração de conjecturas foram sendo construídas durante estes momentos. Contudo para a investigação geométrica não pareceu necessário realizar uma sessão de adaptação ao Geogebra, a aplicação direta da atividade de investigação poderia ser aplicada de forma direta.

Consideramos que outras atividades de Investigação Matemática poderiam ser realizadas: numéricas; estatísticas, algébricas. As avaliações como propostas por Ponte, Brocado e Oliveira (2006) no capítulo VI do livro poderiam ser mais bem exploradas em pesquisas futuras, destacando esta etapa como fundamental numa atividade de aprendizagem.



3º SIPEMAT

SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA
EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA



6 Referências.

BELLEMAIN, F. G. R. ; BELLEMAIN, P. M. B. ; FERREIRA, V. G. G. . **Simulação no ensino da matemática**: um exemplo com Cabri-géomètre para abordar os conceitos de área e perímetro. *III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática-SIPEM*, 2006, Águas de Lindóia, 2006.

BORBA, R.; GUIMARÃES, G. (Org.). **A Pesquisa em educação matemática**: repercussões na sala de aula. São Paulo: Cortez, v.1, 2009.

CAMARA DOS SANTOS, M.. **O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico**: o caso dos quadriláteros. In: Rute Borba, Gilda Guimarães. (Org.). *A pesquisa em Educação Matemática: repercussões na sala de aula*. São Paulo: Cortez, 2009, v. 1, p. 177-211.

LIBANEO, J. C. **Didática** - Coleção Magistério 2º grau – Série Formação do Professor. São Paulo: Cortez, 1994. 261 páginas.

PONTE, J. P. da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H.. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula** – Coleção Tendências em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 1ª ed. 2006. 151 páginas.

TOLEDO, M.; TOLEDO, M.. **Didática de Matemática**: Como Dois e Dois. São Paulo: FTD, 1997. 335 páginas.