O QUE É NECESSÁRIO PARA COMPREENDER PROBLEMAS COMBINATÓRIOS CONDICIONAIS?

Rute Elizabete de Souza Rosa **Borba**, UFPE, borba@talk21.com

Flávia Myrella Tenório **Braz**, UFPE, flavia_myrella@hotmail.com

RESUMO

A partir de problemas combinatórios de livros didáticos e de estudos anteriores, elaborou-se uma categorização cognitiva com 21 tipos de situações. Alunos do 5º, 7º e 9º anos resolveram um teste piloto e observou-se que desde o 5º ano há compreensão de situações combinatórias condicionais, sendo a maior dificuldade lidar com mais de uma relação (escolha, ordenação, posicionamento e/ou proximidade). Recomenda-se, assim, trabalhar problemas condicionais no Ensino Fundamental como forma de estimular o desenvolvimento do raciocínio combinatório e matemático em geral.

Palavras chaves: relações combinatórias, problemas condicionais, Ensino Fundamental.

ABSTRACT

From combinatorial problems of textbooks and previous studies, we elaborated a cognitive categorization with 21 types of situations. Students in 5th, 7th and 9th grades solved a pilot test and it was observed that since the fifth grade there is understanding of conditional combinatorial situations, with the greatest difficulty being in dealing with more than one relation (choice, ordination, positioning and / or proximity). It is recommended, therefore, to work with conditional problems in Basic Education – Primary and High School – as a way to stimulate the development of combinatorial and mathematical thinking in general.

Keywords: combinatorial relations, conditional problems, Basic Education.

1 Por que e como desenvolver o raciocínio combinatório?

O presente estudo busca avançar em achados sobre a compreensão de alunos da escolarização básica sobre situações combinatórias – nas quais se solicita que sejam enumeradas possibilidades. Nesse sentido, será apresentada uma proposta de categorização de problemas combinatórios mais complexos – os que apresentam condições quanto à *escolha* (implícita ou explícita), à *ordenação*, ao *posicionamento* e/ou à *proximidade* de elementos, bem como serão discutidos resultados de um levantamento inicial efetuado com 53 alunos de 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental.

As metas mais amplas de investigação são: categorizar situações combinatórias condicionais para fins de pesquisa de sondagem e de intervenção (ensino experimental), bem como para formação de professores e ensino em sala de aula de alunos do Ensino Básico; criar banco de dados de problemas condicionais; determinar níveis de compreensão por alunos; e levantar dificuldades e estratégias bem sucedidas que poderão servir para posteriores estudos de intervenção.

Diversos autores (Fischbein,1975; Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1996; Borba, 2010) têm apontado a Combinatória como fonte de desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo. Buscar soluções de situações combinatórias – que podem ser de diversas naturezas – é o que em essência se pode chamar resolver um problema, uma vez que é necessário compreender muito bem a situação colocada, identificar claramente os elementos dados e o que se solicita determinar, bem como escolher e colocar em prática estratégia eficiente de resolução. Além disso, para levantar possibilidades, em situações combinatórias, é necessário reconhecer combinações possíveis, mesmo que contrariem o senso comum ou preferências pessoais, e selecionar as que são válidas em dadas circunstâncias. Dessa forma, a resolução de problemas combinatórios exige análise da situação e uso de estratégias que envolvem o pensar em hipóteses.

Por ser de mais alto nível, Inhelder e Piaget (1976) colocam que o raciocínio combinatório é um pensamento característico do período operatório formal, ou seja, desenvolvido plenamente a partir da adolescência até a idade adulta. Entretanto, reconhece-se que esse pensamento pode ser iniciado anteriormente e que leva um longo período para seu desenvolvimento mais amplo. Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) recomendam que, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, diferentes tipos de problemas combinatórios sejam trabalhados.

Pessoa e Borba (2009) observaram que alunos desde os anos iniciais de escolarização compreendem algumas situações combinatórias e, se o número de possibilidades a serem listadas não for demasiadamente elevado, crianças de 7 ou 8 anos de idade podem encontrar todos os casos válidos de um dado problema de Combinatória. A dificuldade maior dos alunos – de todos os níveis de escolarização e consequentemente todos os anos de idade – é o de esgotar todas as possibilidades, ou seja, encontrar todos os possíveis casos para uma situação combinatória.

A maioria dos estudos realizados com alunos concentrou-se em apenas alguns tipos de problemas combinatórios (*produto cartesiano, arranjo*, *combinação* e *permutação*). A escolha de tipos particulares de problemas pode, de alguma forma, ser associada à organização escolar dos problemas combinatórios, sendo os de *produto cartesiano* os que, em geral, são explicitamente trabalhados nos anos iniciais do Ensino Fundamental e os outros tipos são trabalhados no Ensino Médio.

Pessoa e Borba (2009), a partir dos pressupostos de Vergnaud (1986) de que conceitos devem ser abordados de forma articulada, recomendam que os tipos básicos de problemas combinatórios sejam trabalhados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental a partir de estratégias informais – desenhos, diagramas e listagens – possibilitando o gradativo desenvolvimento de procedimentos mais formais, tais como o uso de algoritmos e de fórmulas. Os problemas combinatórios possuem relações comuns e os diferentes tipos possuem propriedades específicas e trabalhá-los simultaneamente possibilita a comparação entre eles e um mais amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório.

2 O que dizem estudos anteriores sobre o desenvolvimento do raciocínio combinatório?

Estudos diversos (Inhelder e Piaget, 1976; Moro e Soares, 2006) apontaram como se desenvolve o raciocínio em tipos específicos de problemas combinatórios. Esses estudos evidenciam como gradativamente são superadas dificuldades, tais como compreender que os mesmos elementos podem ser arrumados de maneiras diferentes, até alcançar – inicialmente por ensaio e erro e posteriormente por métodos mais sistemáticos e formais – a certeza de que todas as possibilidades foram consideradas. Também se observou que inicialmente são apresentadas respostas que não levam em consideração relações combinatórias até chegar-se a soluções combinatórias.

Pessoa e Borba (2010) ampliaram achados anteriores ao se considerar quatro tipos de problemas combinatórios (*produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*) resolvidos por 568 estudantes dos anos iniciais do Ensino Fundamental aos finais do Ensino Médio. O desenho metodológico do estudo possibilitou a análise de desempenhos e de estratégias, com suas respectivas formas de representação simbólica utilizadas, por nível de ensino e por tipo de problema. Foram observadas, desde os anos iniciais, variadas e ricas formas de abordar as situações combinatórias, evidenciando desenvolvimento do raciocínio combinatório bem cedo. Houve reconhecimento de relações combinatórias presentes nas situações apresentadas, mas a determinação do número total de possibilidades, em particular nos problemas nos quais havia elevado número de possibilidades envolvidas, persistiu até mesmo entre os participantes do Ensino Médio. As estratégias variavam em estabelecimento, ou não, de relações combinatórias corretas e em menor, ou maior, sistematização utilizada na solução apresentada. Melhores desempenhos foram obtidos quando o significado era o de *produto cartesiano* e mais fraco desempenho nos demais problemas combinatórios.

No estudo apresentado a seguir buscou-se ampliar a análise dos desempenhos de alunos do Ensino Fundamental em problemas combinatórios com manipulações adicionais de relações combinatórios condicionais, quais sejam: de escolha de elementos (um elemento ou um subconjunto de elementos), de explicitação (ou não) de elementos que devem pertencer às possibilidades levantadas, de determinada ordem que os elementos devem apresentar, de posicionamento e/ou de proximidade de alguns elementos. Objetiva-se, assim, observar o que é necessário na compreensão de problemas combinatórios condicionais e a partir de qual ano escolar grande parte de alunos se mostra preparado a pensar num tipo mais complexo de problema de Combinatória.

3 Quais relações devem ser consideradas em problemas combinatórios?

Problemas combinatórios possuem como relação comum a de que são levantadas (por enumeração direta ou indireta) o número de possibilidades, dadas determinadas condições. A escolha e a ordenação de elementos são relações que se diferenciam de acordo com o tipo de problema. Quanto à escolha, *produtos cartesianos* são compostos a partir de elementos de dois ou mais conjuntos distintos, já *arranjos*, *combinações* e *permutações* são compostos a partir de escolhas de elementos de um conjunto único. Quanto à ordenação, em *arranjos* e *permutações* a ordem dos elementos determina novas possibilidades, enquanto em *produtos cartesianos* e *combinações* a ordem dos mesmos elementos não gera possibilidades distintas.

Em problemas condicionais, pode-se considerar, ainda, outras relações referentes à *explicitação* (ou não) de determinados elementos que devem fazer parte das possibilidades válidas, *posicionamentos*, *proximidades* e/ou *ordenações* específicas que certos elementos devem apresentar. Na categorização, apresentada a seguir, essas relações foram levadas em consideração.

4 Objetivos do estudo

Os objetivos do presente estudo são: criar uma classificação de problemas combinatórios condicionais, tomando como referência aspectos cognitivos; verificar níveis de compreensão de problemas combinatórios condicionais entre alunos do 5º ano do Ensino Fundamental da rede pública; observar e classificar estratégias de alunos ao resolverem problemas combinatórios condicionais; e comparar os desempenhos e compreensões de alunos do 5º ano com alunos do 7º e 9º anos.

Apresenta-se, a seguir, resultados da classificação efetuada até o presente, bem como níveis de desempenho de alunos do 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental. Os resultados são preliminares, no sentido que o instrumento de sondagem foi testado pela primeira vez e passará ainda por reformulações, de modo a tornar as questões mais claras.

5 Resultados iniciais

5.1 Classificação de problemas combinatórios

Para o levantamento de problemas condicionais utilizou-se como base livros didáticos da Educação Básica, bem como o estudo da monografia de Homa (2011). As bases das categorizações encontradas nessas fontes eram de naturezas distintas e diferentes da que se buscou elaborar no presente estudo.

Observou-se que os livros didáticos analisados apresentam, de modo geral, uma categorização de problemas condicionais baseada em critérios essencialmente matemáticos, ou seja, a classificação busca agrupar os problemas de acordo com semelhanças e diferenças entre os problemas considerando-se propriedades e relações matemáticas, tais como tipos de problemas de acordo com os procedimentos matemáticos necessários para sua resolução, conforme a ordem de grandeza numérica envolvida no problema ou, ainda, segundo o número de etapas necessárias para a resolução do mesmo.

O estudo de Homa (2011) categoriza problemas de Combinatória, com base em problemas de livros didáticos e no julgamento de professores e licenciandos em Matemática que classificaram os problemas por nível de dificuldade. Foram, assim, considerados de nível mais fácil de compreensão os problemas que exigem a aplicação de definições; de compreensão média os que exigem aplicação de propriedades combinatórias; e de compreensão difícil que são aquelas que exigem a aplicação de conhecimentos novos. Dessa forma, a categorização sugerida tem base em critérios de natureza didática.

É possível, ainda, considerar-se – como no presente estudo – critérios cognitivos na categorização, nos quais se leva em conta as relações combinatórias que precisam ser percebidas pelos resolvedores dos problemas. Assim, foi considerado como os alunos podem pensar sobre os problemas e a influência nos seus raciocínios de distintas relações, tais como a *escolha* de elementos isolados ou de subconjuntos de elementos; a *explicitação* (ou não) de elementos que devem pertencer às possibilidades levantadas; determinada *ordem* de elementos; *posicionamento*; e/ou *proximidade* dos mesmos.

Estas categorias foram aplicadas, até a presente data, apenas aos problemas combinatórios do tipo *arranjo*, por se tratar de um estudo inicial, podendo-se futuramente verificar sua adequação e necessidade de adaptação a problemas combinatórios de outros tipos (*permutação*, *combinação* e *produto cartesiano*). Vale salientar que a classificação elaborada pode ser ainda passível de modificações no decorrer da pesquisa.

Dessa forma, a análise efetuada de problemas combinatórios condicionais – em particular *arranjos* – apresenta 21 categorias, listadas a seguir, com seus respectivos exemplos.

1. Um elemento explicitado é fixo:

André quer criar uma nova senha para seu e-mail utilizando apenas quatro das cinco letras do seu nome. Quantas senhas com quatro letras diferentes ele pode obter a partir das letras A N D R E, que tenham a letra A, em qualquer posição?

2. Um elemento não explicitado, com determinada característica, fixo:

Marcela foi ao parque de diversões com seu irmão Jorginho e três primas: Marina, Andréa e Tati. Em um banco da roda gigante só cabem três pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem se organizar no banco, desde que uma das primas tenha sempre lugar?

3. Mais de um elemento explicitado fixo:

Quantos números de três algarismos podemos formar com os algarismos 2, 4, 5 e 6 em que os algarismos 2 e 5 sempre apareçam?

4. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, fixo:

Placas de automóveis possuem quatro algarismos. De quantas maneiras diferentes podemos completar com os algarismos 1, 3, 6 e 9, a placa iniciada com KLM 4, que tenha apenas dois algarismos ímpares?

5. Ter pelo menos um determinado elemento não explicitado, com determinada característica, fixo:

Quantos números de três algarismos podemos formar a partir dos algarismos 2, 3, 4 e 5, que tenham pelo menos um algarismo par?

6. Um elemento fixo explicitado em determinada posição:

O Brasil será o país da Copa do Mundo de 2014! Considere que, assim como a seleção brasileira, também participarão a Argentina, a Alemanha, a França e a Itália. Imaginando que o Brasil será o campeão, de quantas maneiras diferentes podem se organizar os quatro primeiros colocados?

7. Um elemento não explicitado, com determinada característica, fixo em determinada posição:

César só lembra dos cinco primeiros algarismos do telefone de Ana e precisa muito falar com ela. Os cinco primeiros algarismos são: 3491-0_ _ _. Pelo que César se lembra o último algarismo do telefone de Ana é impar e nenhum algarismo se repete. Quantos números telefônicos César encontrará sob essas condições?

8. Mais de um elemento explicitado em determinadas posições:

Na praça em que Marina está tem um banco no qual cabem quatro pessoas. De quantas maneiras diferentes Marina e as amigas (Aninha, Amanda, Júlia, Gabi e Maria) podem ocupar os quatro lugares do banco, desde que Marina fique em uma ponta e Gabi na outra?

9. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinadas posições:

Quero criar uma senha de quatro algarismos para meu celular usando alguns destes algarismos: 2, 3, 4, 5 e 7. Quantas senhas de quatro algarismos diferentes eu posso formar em que o primeiro e o terceiro algarismos sejam pares?

10. Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade:

Júlio quer criar uma bandeira para o time de vôlei da escola, do qual faz parte. A bandeira conterá quatro cores, dispostas em linha horizontais. Dispondo das cores azul, verde, branca, amarela e vermelha, quantas bandeiras diferentes Júlio pode formar, desde que as cores azul e vermelha fiquem sempre juntas?

11. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, numa determinada proximidade:

De quantas maneiras diferentes minha tia Joana, meus primos João e Ana e minha mãe, podem se sentar em um banco de cinco lugares sendo que os filhos da minha tia querem ficar sempre juntos?

12. Mais de um elemento explicitado com determinada ordem:

Diego, Mário, João e Carlos estão disputando uma corrida. De quantas maneiras diferentes podem-se obter os três primeiros lugares se Carlos sempre ficar à frente de Mário?

13. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, numa determinada ordem:

Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6 e 8, em que algarismos pares sempre apareçam do maior para o menor, em qualquer posição?

14. Mais de um elemento explicitado com determinada posições e ordem:

De seis opções de lanche (sorvete, coxinha, pizza, hambúrguer, bolo e misto), Thiago pode escolher três para fazer sua refeição. Se ele começar comendo primeiro a coxinha e por ultimo o sorvete, nesta ordem, de quantas maneiras diferentes Thiago poderá fazer esta refeição?

15. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinada posições e ordem:

Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6 e 8, sendo o 1º algarismo par e 3º algarismo ímpar?

16. Mais de um elemento explicitado em determinadas posições e proximidade:

Beto, Pedro, João, André e Paulo estão disputando uma corrida de cavalos. De quantas maneiras diferentes podemos ter os quatro primeiros colocados desde que Pedro e João estejam juntos no 1º e no 2º lugar?

17. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinadas posições e proximidade:

Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 3, 4, 7 e 8, sendo os dois últimos algarismos pares?

18. Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade e ordem

Cinco garotas: Maria, Ana, Paulinha, Bela e Raquel estão disputando na natação. De quantas maneiras diferentes podemos obter as quatro primeiras colocadas desde que Maria e Raquel fiquem sempre juntas e nessa ordem?

19. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, proximidade e ordem:

Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6 e 8, em que números pares sempre apareçam juntos, do maior para o menor?

20. Mais de um elemento explicitado em determinada posição, proximidade e ordem:

Cinco garotas: Maria, Ana, Paulinha, Bela e Raquel estão disputando na natação. De quantas maneiras diferentes podemos obter as quatro primeiras colocadas desde que Ana e Raquel sejam as primeiras, juntas e nessa ordem?

21. Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinadas posições, proximidade e ordem:

Quantos números de três algarismos distintos podemos formar com os algarismos 1, 3, 6 e 8, em que algarismos pares sempre apareçam juntos, no início e do maior para o menor?

5.2 Desempenho de alunos em problemas combinatórios condicionais

Para comprovar a aplicabilidade das questões elaboradas e observar o desempenho de alunos de diferentes anos escolares, foi realizado um estudo piloto em uma escola municipal do Recife. As 21 questões elaboradas foram divididas em dois testes, uma vez que o número de questões seria muito elevado para um único teste. Cada teste contou com 11 questões, sendo que uma questão foi incluída nos dois tipos de testes, para conterem o mesmo número de problemas. A questão repetida nos dois testes foi a que trata da condição ter pelo menos determinados elementos.

Os testes foram aplicados em turmas de 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental, pois se buscou verificar, além da aplicabilidade das questões, em que ano os alunos começam a apresentar maior compreensão de problemas combinatórios condicionais. Participaram deste estudo piloto 18 alunos do 5º ano, 19 do 7º ano e 16 do 9º ano, as respectivas quantidades de alunos que estavam presentes em cada turma no dia de aplicação do teste.

Pôde-se observar estabelecimento de relação com as condições em todas as séries analisadas. Vale salientar que este estabelecimento de relação, não resultou obrigatoriamente no acerto da questão. Houve apenas 02 acertos completos no 5º ano, 04 acertos completos no 7º ano e 10 acertos completos no 9º ano. Porém, o estabelecimento de relação com as condições nas demais questões mostra que, mesmo estando ainda no Ensino Fundamental, os alunos participantes já demonstram alguma compreensão de problemas combinatórios condicionais.

O estabelecimento de relação com as condições foi observado em diferentes estratégias de resolução (listagem, desenho, quadro, *principio fundamental da* *contagem*), sendo a listagem a mais frequente. À semelhança de estudos anteriores (como Pessoa e Borba, 2010), os alunos têm preferência pela listagem também na resolução de problemas condicionais.

Tanto no 5º ano quanto no 7º, os alunos conseguiram estabelecer relações com 17 dos 21 tipos de problemas condicionais, não sendo necessariamente os mesmos tipos nas duas séries. Já o 9º ano estabeleceu relação com 14 dos 21 tipos de problemas. Assim, embora não tenham conseguido chegar ao número total de possibilidades, observou-se que desde o 5º ano os alunos conseguem estabelecer corretas relações combinatórias, mesmo em problemas condicionais.

Os dados são preliminares ainda para se observar quais relações são inicialmente compreendidas e quais são desenvolvidas mais tardiamente, mas apresentaremos o que foi observado com esse grupo de participantes. No 5º ano o problema com maior indicação de compreensão (por sete alunos) foi do tipo mais de um elemento não explicitado fixo, enquanto no 7º ano seis alunos compreenderam melhor o problema do tipo elemento fixo em determinada posição. No 9º ano o problema do tipo pelo menos um determinado elemento apresentou maior índice de compreensão (por cinco alunos).

Os problemas em que não houve compreensão das condições por nenhum dos alunos participantes do 5º ano foram os problemas com mais de um elemento explicitado com determinada proximidade e ordem; com mais de um elemento não explicitado em uma determinada posição, proximidade e ordem; e em que o elemento não explicitado é fixo.

Já no 7º ano, os problemas nos quais não houve estabelecimento de relação com as condições foram os com mais de um elemento não explicitado com uma determinada proximidade; com mais de um elemento explicitado com uma determinada ordem; com mais de um elemento não explicitado com determinada posição e proximidade; e com mais de um elemento explicitado em uma determinada posição e proximidade.

No 9º ano os problemas com os quais não houve estabelecimento de relação foram os com mais de um elemento não explicitado fixo; com mais de um elemento não explicitado com uma determinada proximidade e ordem; com um elemento não explicitado fixo; com mais de um elemento não explicitado com uma determinada ordem; com mais de um elemento explicitado com uma determinada proximidade e posições; com mais de um elemento não explicitado com determinada proximidade e ordem; e com mais de um elemento explicitado com determinadas posições, proximidade e ordem.

Observa-se, assim, maior dificuldade quando as condições são conjuntas, ou seja, envolvem mais de uma das relações de escolha, ordenação, posição ou proximidade. Conclui-se, assim, que quanto mais relações envolvidas na situação combinatória condicional, mais esforço cognitivo será requerido do resolvedor do problema.

6 Conclusões iniciais

Puderam-se observar, através do estudo piloto, alguns ajustes necessários na elaboração de alguns problemas. Esses aspectos serão levados em consideração para a aplicação do instrumento efetivo de sondagem.

Constatou-se que alunos do 5º ano apresentam alguma compreensão de problemas combinatórios condicionais, o que pode significar a possibilidade de se trabalhar com este tipo de problema já neste ano de escolarização. Problemas mais simples podem ser inicialmente abordados com gradativa complexidade ao longo da escolarização.

Cuidados especiais são requeridos em situações nas quais mais de uma relação condicional (de escolha, ordenação, posicionamento e proximidade) deve ser levada em consideração. Quanto maior o número de relações, mais esforço cognitivo é requerido.

Conclui-se, assim, que trabalhar com problemas combinatórios condicionais no Ensino Fundamental é uma possibilidade e pode auxiliar no desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos desse nível de escolarização.

7 Agradecimentos

À escola pública que possibilitou a coleta de dados e aos alunos que se empenharam na resolução dos problemas. Ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) da Universidade Federal de Pernambuco.

8 Referências

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan e NAVARRO-PELAYO, Virginia. **Razonamiento combinatorio**. Madri: Ed. Sintesis, 1996.

BORBA, Rute. O raciocínio combinatório na educação básica. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática, 2010, Salvador. **Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática.** Salvador, 2010.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

FISCHBEIN, Efraim. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**, Reidel, Dordrecht, 1975.

HOMA, Agostinho Iaqchan. Testes adaptativos no padrão SCORM com Análise Combinatória. **Monografia de Especialização.** Canoas: Programa de Pós - Graduação em Educação Matemática da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), 2011.

INHELDER, Barbara e PIAGET, Jean. **Da lógica da criança à lógica do adolescente.** São Paulo: Livraria Pioneira Editora. 1976.

MORO, Maria Lúcia & SOARES, Maria Tereza. Níveis de raciocínio combinatório e produto cartesiano na escola fundamental. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo: v. 8, n.1, pp. 99-124, 2006.

PESSOA, Cristiane. & BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1a a 4a série. **Zetetike** (UNICAMP), v. 17, pp. 105-150, 2009.

PESSOA, Cristiane. & BORBA, Rute. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. **EM TEIA –** Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana. Recife: v. 1, no. 1, 2010.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, 1, 1986. pp. 75-90.