DIFICULDADES ENVOLVENDO A NOÇÃO DE DEMONSTRAÇÃO: UM ESTUDO DE CASO

Francisco Regis Vieira **Alves**, IFCE, fregis@ifce.edu.br
Hermínio **Borges Neto**, UFC, herminio@multimeios.com.br

RESUMO

Neste trabalho apresentamos os dados pertinentes a um estudo de caso desenvolvido no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE. A partir das concepções de Fischbein (1993) e Duval (1993), analisamos e interpretamos as dificuldades dos estudantes no contexto de demonstração em Geometria Analítica. Registramos as dificuldades relativas ao uso de hipóteses e tese. Observamos ainda figuras que envolvem valores epistêmicos semânticos em contradição com os valores epistêmicos teóricos.

Palavras chaves: Prova e demonstração, Ensino, Geometria Analítica.

ABSTRACT

We present data about to a case study from the Federal Institute of Education, Science and Technology of the State of Ceará - IFCE. From the conceptions of Fischbein (1993) and Duval (1993), analyze and interpret students' difficulties in the context of demonstration in Analytical Geometry. We recorded the difficulties regarding the use of hypothesis and thesis. We also observed figures involving semantic epistemic values in contradiction with the theoretical epistemic values.

Keywords: Proofs and demonstration, Teaching, Analytic Geometry.

1 Sobre a noção de demonstração

Frequentemente, no raciocínio matemático descrevemos por meio de desenhos, objetos que podem referenciam representações de objetos do mundo material. Assim, podemos descrever um *círculo* que envolve a ideia de um tonel de vinho ou um *quadrado* que pode explicar a forma de uma cadeira vista de cima, por outro lado, nosso raciocínio pode restringir-se somente a tais entidades conceituais que mencionamos (tais como quadrado, triângulo, linha reta, etc).

Neste caso, nos referimos a figuras geométricas que são *condicionadas pela sua natureza conceitual* (FISCHBEIN, 1993, p. 141). Destarte, um *quadrado* não é apenas uma figura no papel, mas uma forma controlada/condicionada pela sua definição.

Partindo-se destas propriedades, nosso raciocínio pode evoluir na medida em que descobrimos outras propriedades a partir dos elementos que constituem sua definição (ângulos agudos nos vértices, igualdade das diagonais, etc). Deste ponto de vista, podemos falar de conhecimento conceitual ou um raciocínio matemático conceitual.

Neste sentido, Fischbein (1993, p. 148) descreve três categorias de entidades mentais que se referem às figuras geométricas e que, no âmbito da *Geometria Plana*, assumem um papel de destaque quando realizamos uma demonstração que envolve um raciocínio matemático conceitual. Fischbein (1993) dedica uma atenção especial aos *conceitos figurais* que o mesmo caracteriza-os como *uma realidade mental*, pois são controlados e manipulados, em princípio sem resquícios, pelas regras lógicas e procedimentos condicionados por sistemas axiomáticos.

Por outro lado, no interior dos sistemas axiomáticos e lógicos, de modo tradicional, realizamos a prova e a demonstração de resultados ou propriedades. Neste caso, a prova é dedutiva, todavia, *a descoberta e a conjectura de propriedades é frequentemente caracterizada por um processo de argumentação abdutiva* (PEDEMONTE & REID, 2011, p. 282).

Concordamos com Fischbein (1993, p. 149) quando salienta que *o significado vai além da materialidade de uma palavra expressa*. Acrescentamos ainda que o significado supera os limites da materialidade de uma figura ou desenho. Um pouco mais adiante, Fischbein (1993, p. 149) declara que as *figuras geométricas* possuem propriedades como: a) são imagens mentais; (b) a imagem mental de uma figura geométrica é, usualmente, a representação de um modelo material; (c) uma figura geométrica corresponde a uma ideia idealizada, entidade figural purificada e estritamente determinada por sua definição.

Por outro lado, uma figura geométrica esta sempre associada a um conjunto de crenças e concepções daquele que executa seu traçado, deste modo distinguimos:
(i) o valor epistêmico semântico e (ii) o valor epistêmico teórico.

Duval (1993) caracteriza o *valor epistêmico semântico* como o grau de confiabilidade do conteúdo de uma proposição no momento de sua enunciação (evidente, certo, possível, semelhante, pouco provável, absurdez, contraditório, etc). Por outro lado, descreve o *valor epistêmico teórico* como em princípio independente do seu interlocutor e é associado ao estatuto da proposição num *corpus* teórico subjacente (teorema, proposição, axioma, hipótese, etc).

No contexto de ensino, quando nos atemos a atividade de demonstração de um estudante, que elementos devemos considerar? Com avaliar o valor epistêmico semântico e valor epistêmico teórico pertinente às suas produções escritas? Como identificar no seu discurso os significados atribuídos às figuras e desenhos geométricos?

Pelo limites impostos deste escrito, não podemos responder a todos estes questionamentos, entretanto, uma parte deles. Na próxima seção, descrevemos o ambiente em que se desenvolveu o estudo, pressupostos adotados e sua operacionalização.

2 Descrição da pesquisa

A pesquisa de natureza qualitativa foi desenvolvida no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará – IFCE, no ano de 2011. Realizamos um estudo de natureza qualitativa no curso de Engenharia da Computação com o objetivo de identificar as dificuldades relacionadas à atividade de demonstração. Os dados recolhidos na intervenção são referentes aos alunos 2, 4, 5 e 10.

Utilizamos dados provenientes de *entrevistas semiestruturadas*, *protocolos escritos* pelos sujeitos e os dados (imagem e áudio) capturados na atividade de *desktop* fornecidos pelo *software camtasia*.

Apoiamos-nos na perspectiva de Fischbein (1993) e Duval (1993). Assim, escolhemos duas situações problema na quais o estabelecimento e uso de definições condicionam a formulação e uso de qualquer sentença proposicional formulada no intuito da busca por uma solução. Apresentamos então o primeiro problema discutido em Wagner (2006).

Problema 1. Mostre que as alturas de um triângulo se cortam em um ponto.

Fonte: Wagner (2006).

<u>Comentários</u>: Esta situação problema, do ponto de vista da lógica-proposicional, pode ser descrita por uma sentença do tipo $\underset{hipótese}{H} \rightarrow \underset{tese}{T}$, todavia, o modelo de raciocínio para a prova desta propriedade envolve o modelo de *redução ao absurdo*, que equivale a empregar $(H \wedge \sim T) \rightarrow \underset{falsidade}{f} \Leftrightarrow \underset{hipótese}{H} \rightarrow \underset{tese}{T}$. Os estudantes costumam apresentar várias dificuldades com este modelo. Ademais, a elaboração de *figuras geométricas* (FISCHBEIN, 1993) proporciona certas incompreensões.

Apresentamos então o primeiro problema discutido em Wagner (2006).

Problema 2. Mostre que para um quadrilátero qualquer os pontos médios relativos a cada um dos lados descrevem um paralelogramo.

Fonte: Fischbein (1993, p. 150-151).

<u>Comentários</u>: Nesta situação os sujeitos participantes conhecem a propriedade segunda a qual um paralelogramo possui diagonais que se encontram nos seus respectivos pontos médios ou possui lados paralelos. Nesta situação, o auxílio computacional pode impulsionar um valor teórico epistêmico das ilações produzidas nas situações de visualização.

Na próxima seção descrevemos o ambiente de desenvolvimento do estudo empírico. Vale sublinhar que consideramos os *valores epistêmicos teóricos* e *semânticos* atribuídos pelos estudantes e analisamos também suas demonstrações do ponto de vista lógico.

3 Discussão dos dados

No primeiro caso, destacamos a produção do aluno 2. Reparemos que no desenho produzido pelo mesmo, o sujeito escolhe os vértices particulares $A = (0,0)$, B=(5,1) e C=(3,5). Em entrevista, ao ser questionado do motivo de sua escolha indevida, justificou [...] *escolha para ver se dava certo...aleatório. Por exemplo, você tinha indicado naquela hora. Não, era para fazer por variáveis mesmo.*

Em relação ao 2º problema, explicou que:

> [...] é não é não....a intenção era tomar um quadrilátero qualquer....não tem como desenhar e dizer que é qualquer....como vai fazer...mas como é paralelogramo...os lados são paralelos...mas para chegar ai tem que saber que os dois lados são paralelos?

Na figura abaixo vemos o esboço de sua solução. Todo seu raciocínio levou em conta um caso particular. O *valor epistemológico teórico* foi considerado correto.

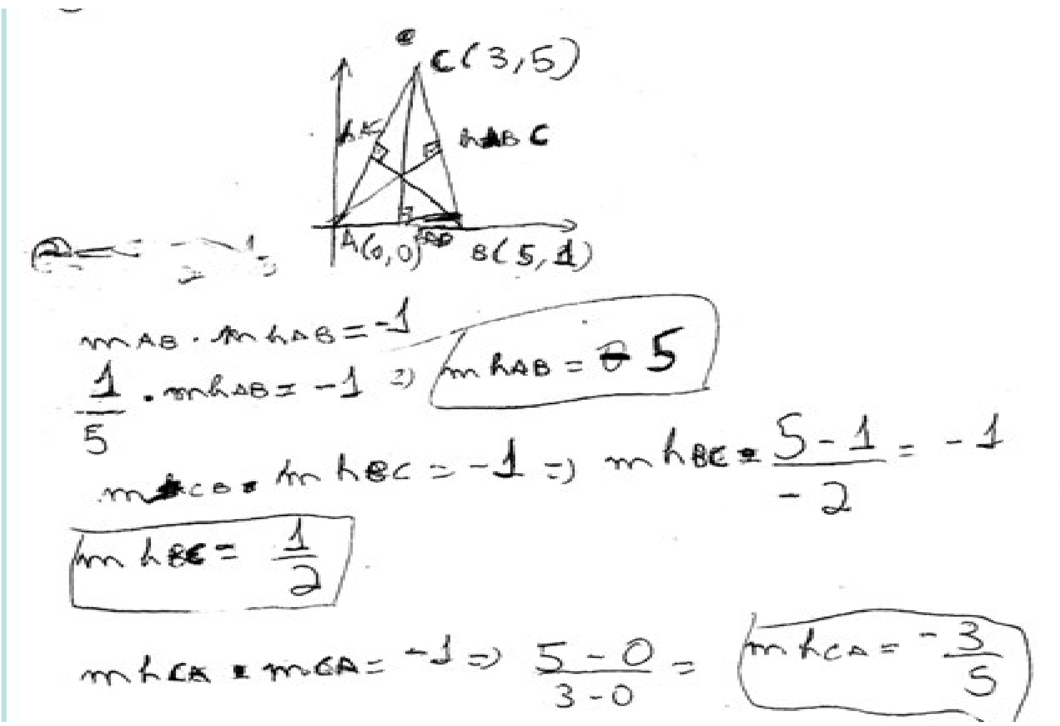


Figura 1. O aluno 2 resolveu o problema 1 usando a própria tese.

O aluno 4 empregou uma atividade argumentativa e dedutiva. Por outro lado, o aluno 4 assume um *valor epistêmico semântico* equivocado na medida em que usou o fato que se quer demonstrar, ou seja, que existe um único ponto de encontro das alturas.

Notemos ainda que o aluno 4 não empregou o *método de redução ao absurdo* e sim uma demonstração direta.

Do ponto do ponto vista lógico, o aluno 4 empregou $T \rightarrow T$, o que podemos perceber pelo seu desenho. Deste modo o mesmo não conseguiu verificar a tese designada pelo problema 1. Neste como em outros casos, prevemos o surgimento de dificuldades, sobretudo, quando o solucionador de problema tenciona elaborar um desenho antes e depois da verificação formal da propriedade ensejada.

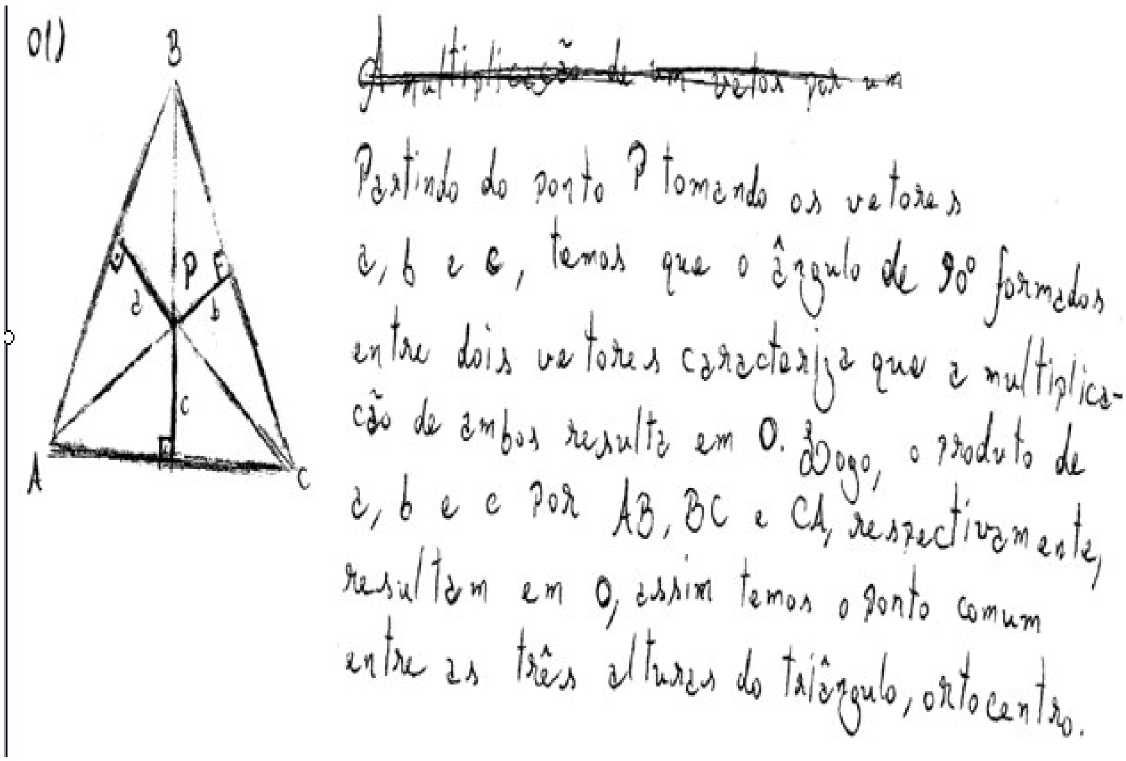


Figura 2. O aluno 4 resolveu o problema 1 usando a própria tese.

Na sequência exibimos o extrato da solução do aluno 5. O que chama atenção aqui é sua descrição do desenho explicativo da situação. Ademais, destacamos neste caso o que o *valor epistêmico teórico* está errado, uma vez que sua figura nos remete a *imagem mental* de um quadrado.

Por outro lado, no problema 2, fornecemos um quadrilátero qualquer. Quando questionado, respondeu:

> Pelas coordenadas podemos notar que não é um retângulo...porque desenhar é difícil....mas pelas coordenadas....as diagonais se encontram no ponto médio....mas supondo que se encontram...se não der certo...mostrou que refutou o que diz aqui...se deu certo....todo quadrilátero tem esta regra...

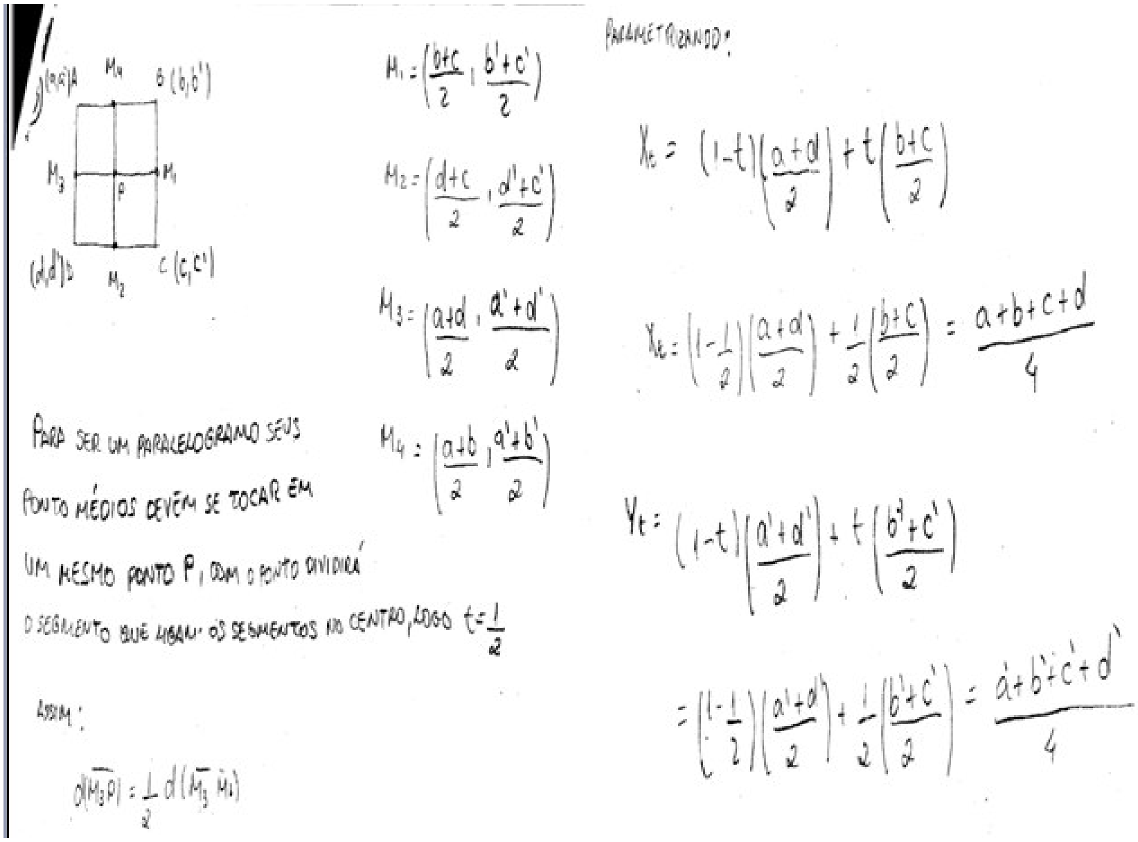
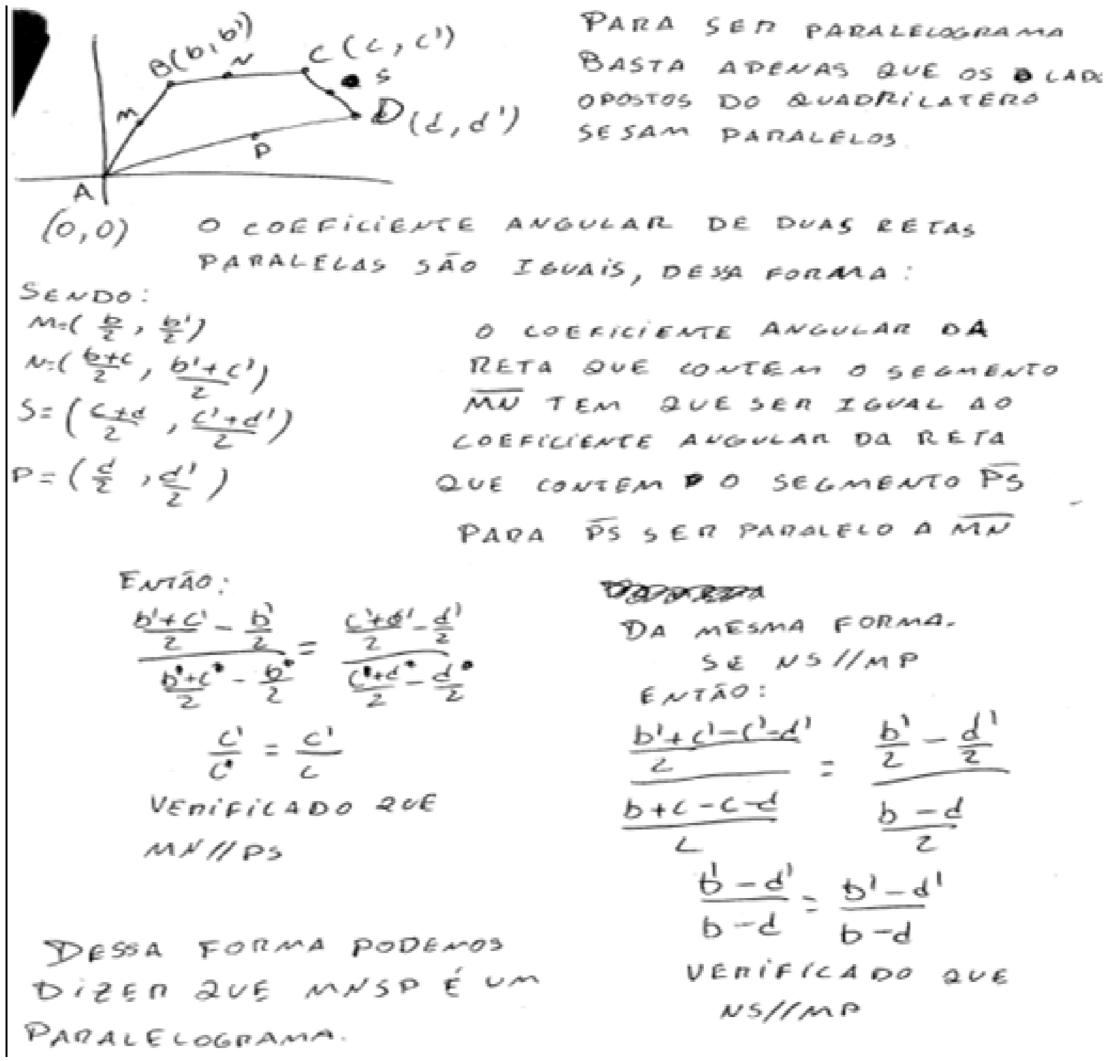


Figura 3. O aluno 5 manifestou valores epistêmicos e teóricos em contradição.

A partir da fala do aluno 2 e da sua argumentação acima, registramos que os valores epistêmicos teóricos e semânticos, neste caso, estão em contradição, deste modo, apenas em situação de entrevista conseguimos extrair a verdadeira intenção do aluno 2 na resolução do problema 2.

Por fim, apresentamos o extrato do aluno 10. O mesmo destacou a sentença que envolve uma fato admitido como verdadeiro neste contexto relativo a propriedade de um paralelogramo. Vale sublinhar que o sujeito 10 adotou um *conceito figural* para descrever sua estratégia que reflete sua imagem mental sobre um quadrilátero qualquer de vértices designados pelos pontos ABCD.

Sublinhamos ainda a falta de orientação e organização na disposição do discurso do aluno 5 no texto. Seu discurso desrespeita o sentido *standard* que se emprega na demonstração em Matemática e o leitor precisa identificar as relações conceituais entre cada trecho que envolve a língua natural e equações condicionadas pelas inferências.



PARA SER PARALELOGRAMA BASTA APENAS QUE OS LADOS OPOSTOS DO QUADRILATERO SEJAM PARALELOS

O COEFICIENTE ANGULAR DE DUAS RETAS PARALELAS SÃO IGUAIS, DESSA FORMA:

SENDO:

$M=\left(\frac{b}{2}, \frac{b'}{2}\right)$

$N=\left(\frac{b+c}{2}, \frac{b'+c'}{2}\right)$

$S=\left(\frac{c+d}{2}, \frac{c'+d'}{2}\right)$

$P=\left(\frac{d}{2}, \frac{d'}{2}\right)$

O COEFICIENTE ANGULAR DA RETA QUE CONTEM O SEGMENTO $\overline{MN}$ TEM QUE SER IGUAL AO COEFICIENTE ANGULAR DA RETA QUE CONTEM O SEGMENTO $\overline{PS}$ PARA $\overline{PS}$ SER PARALELO A $\overline{MN}$

ENTÃO:

$$\frac{\frac{b'+c'}{2}-\frac{b'}{2}}{\frac{b+c}{2}-\frac{b}{2}}=\frac{\frac{c'+d'}{2}-\frac{d'}{2}}{\frac{c+d}{2}-\frac{d}{2}}$$

$$\frac{c'}{c}=\frac{c'}{c}$$

VERIFICADO QUE MN//PS

DA MESMA FORMA. SE NS//MP ENTÃO:

$$\frac{\frac{b'+c'-c'-d'}{2}}{\frac{b+c-c-d}{2}}=\frac{\frac{b'}{2}-\frac{d'}{2}}{\frac{b-d}{2}}$$

$$\frac{b'-d'}{b-d}=\frac{b'-d'}{b-d}$$

VERIFICADO QUE NS//MP

DESSA FORMA PODEMOS DIZER QUE MNSP É UM PARALELOGRAMA.

Figura 4. O aluno 10 manifestou uma atividade de demonstração fora do modelo standard de prova e demonstração em Matemática.

4 Resultados e considerações

A atividade do aluno envolvendo demonstrações em Geometria Analítica apresenta elementos que merecem grande atenção. Os documentos escritos e nas entrevistas, evidenciamos as dificuldades referentes ao método de redução ao absurdo, exigido no problema 1. Ademais, o método de redução ao absurdo exige assumir de modo provisório a negação da tese, deste modo, na condição em que o sujeito emprega um desenho (aluno 2), deverá também descrever outro desenho no final da demonstração.

Os resultados apontaram que: os alunos empregam a própria tese na solução dos problemas propostos; descrevem desenhos e figuras com *valor epistêmico teórico* em contradição com o *valor epistêmico semântico*; manifestam uma produção escrita que desrespeita o modelo *standard* em Matemática de se escrever uma demonstração; não distinguem *hipótese* de *tese* e em certos casos, iniciam sua argumentação a partir da própria tese.

Por fim, algumas escolhas arbitrárias feitas em *Geometria Analítica* evidenciam a rica relação conceitual com a *Geometria Plana*, e, em virtude dos problemas propostos possuírem uma intrigante conexão com os saberes estudados de *Geometria Plana*, a manifestação de incompreensões nas atividades de argumentação e demonstração se mostrou maior, como previsto em Duval (1993, 1995).

5 Referências

Duval, Raymond. (1993). Argumenter, démontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive ? In : *Le cahier Petit*, nº 31, 37-61.

Duval, Raymond. (1995). *Sémiosis et Pensée Humaine*. Paris: Peter Lang Edition.

Fischbein, Efrain. (1993). The theory of figural concepts. In: *Educational Mathematics Studies*. 24, 139-162.

Pedemonte, Betina. & Reid, David. (2011). The role of abduction in proving process. In: *Educational Mathematics Studies*, nº 76, 281-303.

Vagner, Eduardo. *Aplicações de Geometria Analítica*. (2006, 01 janeiro). Acesso em: 24/12/2011. Disponível em: http://video.impa.br/