A INDUÇÃO FINITA SOB A ÓTICA DO PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO

AUTORES

Eduardo Machado da **Silva,** FATEC, dumatematica@gmail.com

Angela Marta Pereira das Dores **Savioli**, UEL, angelamarta@uel.br

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar algumas características do pensamento matemático avançado, presentes em atividades resolvidas por estudantes de graduação, envolvendo o conceito de indução finita. Foi possível concluir que alguns estudantes ainda não incorporaram essas características possivelmente devido à imaturidade e ao não entendimento das regras do jogo matemático. Segundo Tall (1995, 2002) os estudantes precisam passar por uma reconstrução cognitiva com intuito de estabelecerem conexões com o mundo externo passando do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado.

Palavras Chaves: indução finita, pensamento matemático avançado, provas e demonstrações.

ABSTRACT

The aim of this work is to present some characteristics of the advanced mathematical thought, present in activities solved by graduation students, involving the concept of finite induction. It was possible to conclude that some students had not yet incorporated these characteristics maybe due to immaturity and to not the agreement of the rules of the mathematical game. According to Tall (1995, 2002) the students need to pass for a cognitive reconstruction with intention to establish connections to external world connecting the elementary mathematical and the advanced mathematical thought.

Key Words: finite induction, advanced mathematical thought, proofs and demonstrations.

1. Introdução

A validação de teoremas matemáticos por meio de demonstrações formais é uma atividade realizada frequentemente em cursos de licenciatura em matemática e compõem uma série de objetivos a serem cumpridos pelos estudantes como, por exemplo, desenvolver, entender e aplicar o raciocínio abstrato. Concordamos com Sztajn (2002, p. 18) que "... um professor precisa dominar o conteúdo da disciplina que pretende ensinar." Em especial cremos que o professor de matemática precisa compreender as ideias referentes aos processos de provas e demonstrações para que possa apresentar, debater e mostrar a seus estudantes o processo evolutivo da matemática. Além disso, segundo Pires (2002, p. 47) um professor que ensina matemática deve "conceber que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação."

Dessa maneira, a demonstração de uma afirmação matemática não pode ser feita apenas a partir de alguns testes, por mais evidente que ela pareça ser. Por exemplo, não podemos garantir que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180^{o} construindo e verificando alguns casos. Toda afirmação matemática deve estar acompanhada de uma demonstração formal. Assim, entendemos que atividades que promovam o desenvolvimento desta característica do pensamento matemático deve estar contemplada em cursos de licenciatura e é primordial que o futuro professor de matemática conheça e trabalhe adequadamente com essas questões nos Ensinos Fundamental e Médio adaptando as atividades a esses níveis, porém sem infringir as regras do jogo matemático[1].

Neste trabalho trataremos e analisaremos o princípio de indução finita, método de demonstração (formal) matemática utilizado para provar afirmações ligadas ao conjunto dos números inteiros a partir do conceito de pensamento matemático avançado apresentado por Tall (1995).

---

[1] Jogo Matemático: consiste na habilidade dos estudantes aplicarem corretamente os conceitos, definições e propriedades matemáticas.

2. O Pensamento Matemático Avançado

O poder de formular conceitos é um dos verbetes que encontramos em Ferreira (2004) para definir pensamento. Dessa forma, poderíamos dizer que o pensamento matemático consiste em estabelecer ideias matemáticas. Assim, por exemplo, quando um aluno do Ensino Fundamental, Médio ou Superior resolve algum problema matemático ele está fazendo uso de um pensamento matemático. Mas qual(is) característica(s) diferencia(m) o pensamento do estudante que se encontra no nível fundamental ou médio de um estudante que está na graduação? Para nós, características como imaginação, intuição, visualização, raciocínio indutivo, raciocínio dedutivo, dentre outras, fazem parte do pensamento matemático. Porém, entendemos que é o nível de abstração e generalização que se apresenta em cada atividade que distingue o pensamento de um estudante no nível básico de um estudante na graduação. E essas características estão presentes quando tratamos do conceito de pensamento matemático avançado proposto por Tall (1995). Dessa forma,

> “[...] devemos focar nossa atenção no círculo de atividades do pensamento matemático avançado: do ato criativo de considerar um contexto em pesquisa matemática, passando pela formulação criativa de conjecturas e ao estágio final de refinamento e prova.” (TALL, 2002, p.3).

Algumas atividades como a resolução de problemas, aplicadas nos Ensinos Fundamental e Médio, podem apresentar as características anteriores, mas é a definição e a dedução formal que distinguem o pensamento matemático avançado do pensamento matemático elementar.

Para Deyfrus (1991) o pensamento matemático avançado se caracteriza pelas diversas interações que ocorrem e estão presentes nas atividades propostas aos estudantes, como por exemplo, representações, visualizações, generalizações, classificações, sistematizações; além do desenvolvimento de conjecturas, abstrações e formalizações. Segundo Tall (1995), o pensamento matemático avançado envolve o uso de estruturas cognitivas que abarcam uma série de atividades matemáticas com intuito de construir e desenvolver constantemente novas ideias. Essa perspectiva propicia aos estudantes ampliarem de modo crescente um sistema de teoremas demonstrados. Para

Gray (1999) o pensamento matemático avançado tem sentido quando é utilizado por “matemáticos profissionais”. Porém, esse termo pode ser empregado a estudantes que conhecem e utilizam conceitos, definições, teoremas e propriedades para desenvolverem suas atividades.

Assim, estão inseridas, no pensamento matemático avançado, várias características que compõe a atividade matemática e o processo de aprendizagem. Portanto, uma tarefa na qual o estudante busca compreender a definição de certo conceito matemático a partir de verificações de exemplos e contraexemplos deduzindo propriedades, fazendo conexões com o mundo externo, se reconstruindo cognitivamente até que ele possa realizar a demonstração de uma proposição.

Dessa forma, a partir dessas considerações, concluímos que quando o professor propõe a realização de alguma atividade para seus estudantes ele sugere e apresenta, mesmo que involuntariamente, uma situação na qual o pensamento matemático está presente podendo contribuir dessa forma para a aprendizagem dos estudantes. Porém, o professor não poderá saber se os estudantes compreenderam efetivamente os conceitos abordados, pois segundo Deyfrus (2002) a compreensão ocorre na mente de cada um deles e frequentemente após longas sequências de atividades de aprendizagem.

Em geral, uma prova matemática consiste emapresentar argumentos que possam convencer outra pessoa da validade daquela afirmação. Tall (2002) diz que os estudantes possuem grande dificuldade nessas atividades, pois eles ainda não têm familiaridade com a cultura matemática. Além disso, o autor apresenta uma observação: para convencer um amigo basta organizar os argumentos de forma coerente, enquanto que para o inimigo é necessário que além da condição anterior o argumento seja analisado e aperfeiçoado, pois ele vai resistir utilizando o método da crítica. É essa diferença entre os argumentos utilizados para convencer um amigo ou um inimigo que consiste a transição do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado.

Em atividades de demonstrações matemáticas, em geral, os estudantes agem como se estivessem convencendo um amigo. Isso significa que alguns deles ainda se encontram no nível do pensamento matemático elementar e que precisam/necessitam de mais atividades para alcançarem e desenvolverem o nível do pensamento matemático avançado. Esses estudantes apresentam exemplos ou mostram alguns casos na qual uma certa afirmação pode ser verificada, ou seja, eles não utilizam definições, conceitos e propriedades matemáticas com o intuito de desenvolver uma demonstração. Esta característica indica, segundo Tall (2002), que os estudam precisam passar por uma reconstrução cognitiva, na qual eles possam usar adequadamente entidades abstratas com o objetivo de construírem definições formais e deduções lógicas, transpondo do pensamento matemático elementar para o pensamento matemático avançado.

Tall (1995) afirma que “a matemática elementar começa com percepções e ações sobre objetos no mundo externo”. Pensamos que com relação à indução finita os estudantes não possuem percepções. As situações que analisamos apontam apenas para ações, pois logo que percebem que a demonstração da proposição deve ser feita via indução finita começam a desenvolver as etapas desse método, sem refletir sobre. Além disso, vale lembrar que esse conceito é tratado inicialmente em cursos superiores de licenciatura em matemática, portanto consiste em uma nova ideia para os estudantes ingressantes. O fato de não terem percepções envolve as seguintes hipóteses: a primeira é que os livros que tratam do assunto trazem em seus enunciados “prove por indução” o que não permite que os estudantes pensem em outras possibilidades para solução. Isso é gerado por um enunciado estático, rígido e direto. Outro fator que não contribui para a reflexão desse tema é que os problemas apresentados são descontextualizados, isto é, a fórmula (ou proposição) já está pronta bastando apenas que os estudantes demonstrem que ela é verdadeira. Além dessas, há casos em que os estudantes buscam um modelo, como guia, para provarem a validade da proposição dada.

Uma maneira de buscarmos reverter o quadro anterior é abordar a indução finita através do pensamento matemático avançado que se desenvolve por meio do

> uso de estruturas cognitivas produzidas por uma gama de atividades matemáticas para construção de novas ideias que ampliam o sistema de teoremas estabelecidos. O crescimento cognitivo elementar para o pensamento matemático avançado no indivíduo pode começar,

> portanto, da percepção e da ação dos objetos no mundo externo através de dois desenvolvimentos paralelos um visual-espacial e o verbal-dedutivo. (TALL, 1995, p. 3)

Como podemos notar, nossas hipóteses apontam para um tratamento do conceito de indução finita que não contempla o pensamento matemático avançado. Pois em geral os livros focam apenas a resolução de exercícios enfatizando a ação e não proporcionando a oportunidade do estudante vivenciar uma experiência matemática, dessa forma, o que se desenvolve nos estudantes é a aplicação da técnica.

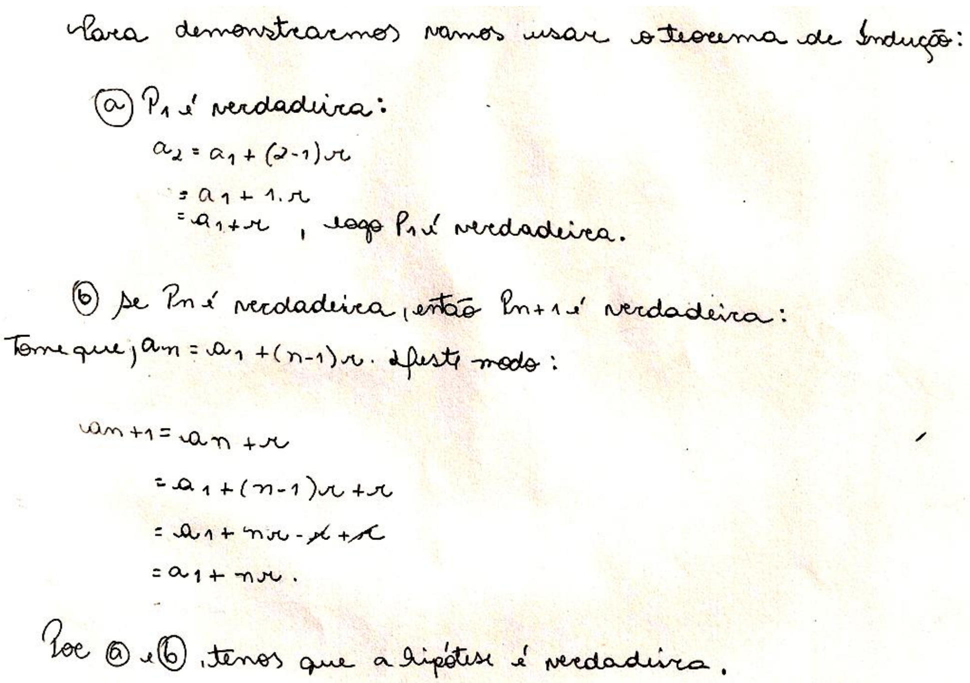
3. Experimentação e Análise

As atividades desenvolvidas ocorreram durante os meses de Março e Abril de 2009, onde foi aplicada em quatro sessões, uma sequência didática baseada nos pressupostos da engenharia didática de Artigue (1996), a uma turma composta por 23 estudantes, que estavam cursando a terceira série do curso de licenciatura em matemática. Optamos por essa metodologia, pois estávamos interessados nos processos de ensino e aprendizagem do conceito indução finita, o que contempla pesquisas com esse foco segundo Almouloud (2008). Ao analisarmos os registros escritos dos estudantes, verificamos a possibilidade de investigar qual o tratamento dado pelos estudantes para o conceito de indução finita sob a ótica do pensamento matemático avançado.

A questão que foi proposta na sequência didática e que utilizaremos aqui para realizar nossas análises é: uma Progressão Aritmética com primeiro termo a_1 e razão r é uma sequência de números cujo primeiro elemento é a_1 e tal que cada elemento, a partir do segundo, é igual ao anterior mais a razão. Em símbolos, se $n \geq 2$ então $a_n = a_{n-1} + r$. Prove que o termo geral de uma Progressão Aritmética é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$. Observemos que o enunciado não explicita a utilização da indução finita para provar a proposição. Trata-se de um problema que aparece em alguns livros didáticos que tratam do assunto indução finita e mostra aos estudantes que há conexões entre assuntos do Ensino Médio e Superior.

Inicialmente acreditávamos que na resolução desta questão os estudantes poderiam começar realizando alguns testes para realmente mostrar que se trata de uma afirmação verdadeira. Intuitivamente eles poderiam concluir que a verificação para alguns casos particulares chegaria ao caso geral. Uma particularidade que este problema apresenta é que a “conclusão” poderia ocorrer por meio da indução empírica o que mostra realmente que eles confundem indução finita com indução empírica.

A primeira solução que apresentamos é:



Para demonstrarmos vamos usar o teorema de Indução:

(a) P_1 é verdadeira:

$a_2 = a_1 + (2-1)r$

$= a_1 + 1.r$

$= a_1 + r$, logo P_1 é verdadeira.

(b) se P_n é verdadeira, então P_{n+1} é verdadeira:

Tome que, $a_n = a_1 + (n-1)r$. Deste modo:

$a_{n+1} = a_n + r$

$= a_1 + (n-1)r + r$

$= a_1 + nr - \cancel{r} + \cancel{r}$

$= a_1 + nr$.

Por (a) e (b), temos que a hipótese é verdadeira.

Figura 1: Solução proposta por Huguinho

Como podemos notar e estudante Huguinho resolveu o problema proposto utilizando o método de indução finita e efetuou corretamente a primeira etapa da prova que é verificar para o menor caso possível. A seguir afirma, no início da segunda etapa, que o fato de P(*n*) ser verdadeira implica em P(*n*+1) também ser verdadeira. Porém Huguinho e alguns de seus colegas cometeram erros referentes às transformações algébricas, ou seja, não utilizaram a hipótese para encontrar a tese.

Utilizando a perspectiva do pensamento matemático avançado de Tall (1995), podemos notar que esse estudante não consegue ainda construir novas ideias, consequentemente, entendemos que não há percepção com objetos do mundo exterior. Esse exemplo comprova que estudantes têm dificuldade em atividades que envolvem provas formais em matemática. Segundo Tall (2002), porque não possuem familiaridade com a cultura matemática e assim, devem passar por uma reconstrução cognitiva.

Destacamos a seguir a solução apresentada por Zezinho.

Se $n \geq 2$ então $a_n = a_{n-1} + r$

a_1

$a_2 = a_1 + r$

$$\begin{aligned} a_3 &= a_2 + r \\ &= (a_1 + r) + r \\ &= a_1 + 2r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_4 &= a_3 + r \\ &= (a_1 + 2r)\, r \\ &= a_1 + 3r. \end{aligned}$$

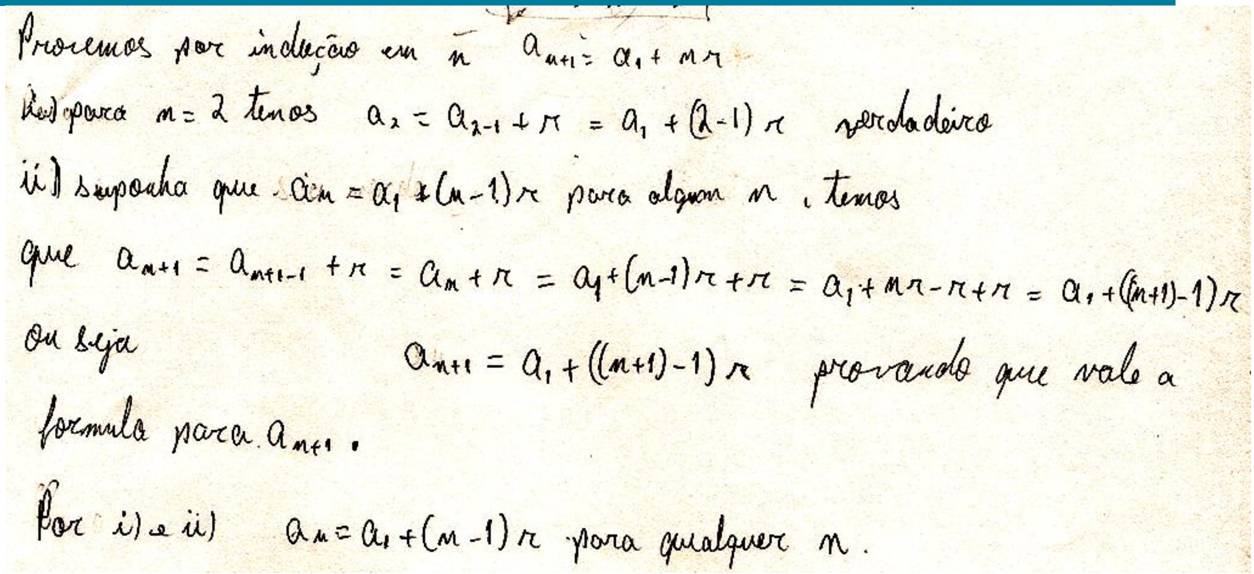
$\vdots$

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + r \\ &= (a_1 + (n-2)r) + r \\ &= a_1 + nr - 2r + r \\ &= a_1 + (n-1)r \end{aligned}$$

Figura 2: Solução proposta por Zezinho

A análise dessa atividade nos mostra que esse estudante buscou desenvolver sua solução utilizando o método da indução empírica. Sabemos que este tipo de prova não se aplica na matemática, o que nos faz concluir novamente a dificuldade que eles possuem ao serem submetidos a atividades desse gênero. Pensamos que este estudante pode até ter alguma percepção com o mundo exterior, nesse caso associando uma tentativa de prova matemática com a indução utilizada nas ciências experimentais. Porém, mostrou que não possui maturidade matemática para compreender o que é uma demonstração formal.

Por fim apresentamos a seguinte resolução para o mesmo problema:


Provemos por indução em n $a_{n+1} = a_1 + nr$

i) para $n = 2$ temos $a_2 = a_{2-1} + r = a_1 + (2-1)r$ verdadeiro

ii) suponha que $a_n = a_1 + (n-1)r$ para algum n, temos

que $a_{n+1} = a_{n+1-1} + r = a_n + r = a_1 + (n-1)r + r = a_1 + nr - r + r = a_1 + ((n+1)-1)r$

ou seja

$a_{n+1} = a_1 + ((n+1)-1)r$ provando que vale a

formula para a_{n+1}.

Por i) e ii) $a_n = a_1 + (n-1)r$ para qualquer n.

Figura 3: Solução proposta por Luizinho

Em nossa avaliação o estudante Luizinho utilizou e prova por indução finita de modo correto, o que nos leva a concluir que ele possui algumas características do pensamento matemático avançado, como por exemplo, apresenta sinais de comportamento referente a um matemático profissional, pois utiliza conceitos e definições para desenvolver o raciocínio. Além disso, podemos constatar que ele consegue realizar abstrações de conceitos matemáticos e generalizar afirmações. Inferimos que esse estudante pode desenvolver novas ideias a partir das que ele já tem, pois apresenta certa maturidade matemática. Porém, mesmo apresentando estas características, o que mostra que ele se encontra no nível do pensamento matemático avançado, segundo Tall (2002), deduzimos que ele não apresentou percepção com o mundo externo.

4. Considerações Finais

Como pudemos notar o pensamento matemático está presente constantemente em atividades matemáticas, tanto no ensino básico quanto no superior, sendo diferenciado por meio da abstração e generalização que compõe cada atividade.

Dessa forma, considerando em especial o pensamento matemático avançado, pudemos constatar em atividades que envolvem o conceito de indução finita, que alguns estudantes não apresentaram as características relativas a esse conceito, isto é, ainda não amadureceram matematicamente, pois não conseguem relacionar ideias, fatos, conceitos, definições e propriedades matemáticas. Pensamos que isso pode ser uma herança dos Ensinos Fundamental e Médio porque nos dias de hoje pouco ou quase nada se trata de provas e demonstrações matemáticas nesses níveis. É comum a matemática ser apresentada como uma ciência rígida pronta e acabada em que os objetivos dos professores consistem em difundir os transformismos algébricos e aplicações de fórmulas que os estudantes nem fazem ideia de onde vieram.

Acreditamos que existem alguns obstáculos que os estudantes devem superar para desenvolverem o pensamento matemático avançado, como por exemplo, buscarem o entendimento e a compreensão dos conceitos matemáticos, exercitarem a abstração e a generalização, representações, visualizações, classificações, sistematizações e formalizações.

Como vimos, não buscam associar a indução finita com o mundo exterior. Além disso, os estudantes confundem hipótese e tese na proposição. Dessa forma, não conseguem percorrer o caminho para se chegar à demonstração. Cremos que isso ocorre devido à falta de atividades matemáticas que proporcionem um ambiente em que possam atuar como um matemático profissional.

5. Referências Bibliográficas

ALMOULOUD, S. A. Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 3, n.6, p. 62–77, UFSC, 2008.

ARTIGUE, M. Engenharia Didática. In. BRUN, J. Didactica das Matemáticas. Lisboa, Portugal: Instituto Piaget, 1996.

DREYFRUS, T. On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In **Proceedings of 15th International Conference for**

the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 33-48). Assis, Itália, 1991.

DREYFRUS T. Advanced Mathematical Thinking Process. In D. Tall, **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht: Kluwer, 2002.

FERREIRA, A. B. H. **Miniaurélio**: o minidicionário da língua portuguesa. 6ª edição. Curitiba: Positivo, 2004.

PIRES, C. M. C. Reflexões sobre os Cursos de Licenciatura em Matemática, Tomando como Referência as Orientações Propostas nas Diretrizes Curriculares Nacionais para Formação de Professores da Educação Básica. Educação Matemática em Revista. Ano 9, n. 11–A, p. 44–56, março/2002.

SILVA, E. M. Compreensão de Estudantes de um Curso de Matemática a Respeito do Conceito de Indução matemática. 2010. Dissertação (Mestrado) – Ensino de Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual de Londrina, Londrina, Paraná.

SZTAJN, P. O que Precisa Saber um Professor de Matemática? Uma revisão da literatura americana dos anos 90. Educação Matemática em Revista. Ano 9, n. 11–A, p. 17–28, março/2002.

TALL, D. The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall, **Advanced Mathematical Thinking.** Dordrecht: Kluwer, 1991.

TALL, D. Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol. 1, pp. 161–175, Recife/PE, Brasil. Julho, 1995.

TALL, D. **Advanced Mathematical Thinking**. Kluwer Academic Publisher: United Kingdom, 2002.