3º SIPEMAT
SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A CONCEITUALIZAÇÃO ANTIGA E MODERNA: POSSIBILIDADES DE INTERPRETAÇÃO DA ORIGEM DO SIMBOLISMO ALGÉBRICO MODERNO

Evilásio José de **Arruda**, UFMT, josearruda@terra.com.br

Resumo

Neste artigo apresentamos reflexões iniciais que podem ser feitas a partir de ideias presente no livro intitulado “Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra” de Jacob Klein publicado em 1992. Nesse livro, Klein trata do processo e a forma em que a Matemática Grega anexou à Matemática Moderna nos séculos XVI e XVII. Nosso propósito é tratar da transformação do conceito de arithmo/número desde Platão, passando por Diophantus até Viéte, que é segundo Klein (1992), o fator principal do início do simbolismo Algébrico Moderno. Pretendemos utilizar essa transformação de interpretação e aplicação, para repensar os motivos pelos quais o tratamento do Pensamento Algébrico Elementar está passando por um momento letárgico.

Palavras-chave: História da Matemática, simbolismo algébrico, número.

Abstract

In this article we will present some initial reflections on the ideas from the book "Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra" written by Jacob Klein in 1992. Klein treats the process and the form in which the Greek Mathematics assimilated Modern Mathematics in the sixteenth and seventeenth century. Our purpose is to study the transformation of the concept of arithmo/number since Plato to Diophanthus and Vieta, which is to Klein (1992) the main factor about the beginning of Modern Algebraic Symbolism. We pretend to utilize this transformation of interpretation and application to rethink the reasons why the treatment of Algebraic Elementary Thinking is passing through a lethargic moment.

Keywords: History of Mathematics, algebraic symbolism, number.

1. Introdução

Para compreender os fundamentos da Educação Matemática precisamos conhecer os aspectos epistemológicos e históricos da Ciência Matemática, ou seja, entender as perspectivas em que determinado conceito foi elaborado do ponto de vista do contexto histórico. Nesse sentido, o estudo da obra de Jacob Klein (1899-1978) publicada originalmente em 1934-36 em alemão e 1968 em inglês, sendo reimpresso integralmente em 1992, torna-se muito importante, pois trata da revolução Matemática ocorrida nos séculos XVI e XVII. O título da obra já sinaliza para a necessidade de conhecer o momento histórico e os motivos pelos quais o pensamento matemático Grego Antigo anexou e transformou a Matemática, tendo como conseqüência a “criação” de uma nova linguagem Matemática, considerada como mudança de paradigma[1] na interpretação de fenômenos físicos. Klein identifica que a criação da linguagem formal da Matemática é idêntica com a fundação da Álgebra Moderna, então, há uma conexão íntima entre a linguagem Matemática formal e o conteúdo da Física Matemática, e essa conexão decorrem do tipo especial de conceitualização, que é concomitante com a Ciência Moderna, que por sua vez foi fundamental para sua formação.

O livro de Jacob Klein está separado em três partes. Na primeira parte do livro são discutidas concepções da Filosofia Pitagórica, Platônica referente às similaridades e diferenças entre Logística (teórica e prática) e Aritmética (teórica e prática), bem como a crítica de Aristóteles ao fato de que a Matemática é auto-subsistente e separado da percepção sensorial. Na segunda parte, Klein trata da relação entre a concepção Antiga e Moderna do trabalho de Diophantus (século III), considernado-o como uma teoria Logística e com dependência do conceito de arithmo, contudo incorpora uma tradição algébrica pré-grega mais geral. Ainda na segunda parte Klein apresenta a transformação da técnica de Diophantus nas mãos de Viète (1540-1603), mostrando que o renascimento e assimilação da Logística Grega no século XVI na perspectiva da ampliação do conceito de número com Stevin (1548-1620), por exemplo, levou ao estabelecimento da estrutura conceitual do simbolismo algébrico que é na verdade o resultado dessa mudança conceitual do número. Na terceira parte do livro, o appendix, trata da introdução da arte analítica por François Viète.

---

[1] Segundo (ABBAGNAMO, 2007), Platão utilizou o termo paradigma como modelo e em Kuhn o conceito de paradigma assume significado epistemológico no sentido de uma “constelação de crenças comungadas por um grupo”, ou seja, o conjunto das teorias, dos valores e das técnicas de pesquisa de determinada comunidade científica.

Nossa empreitada, neste momento, é compreender o processo de reinterpretação da renovação da doutrina numérica Grega sob a luz do contexto histórico da época, mesmo sabendo que isso não é tão simples, pois as concepções desses últimos quatro séculos estão enraizadas em nossa mente, ou seja, temos dificuldades de lidar com a intencionalidade que há na relação sujeito/objeto no sentido de perceber/mentalizar as diferenças de conceitualização Antiga e Moderna no que diz respeito a linguagem e o conteúdo dessa linguagem no início da Simbolismo Algébrico Moderna.

Nesse período houve transformações, rupturas, mudanças de paradigma – de um lado temos o aspecto contemplativo/interpretativo em que prevalece o mundo das semelhanças, de forma que o conhecimento é um espelho, uma reflexão do mundo determinado pelos seus objetos, ou seja, cada objeto do mundo pode ser representado pelo seu número. Do outro lado há o surgimento do aspecto representativo em que tudo se aplica a representações das coisas e não a coisa em si, de forma que os conceitos, os símbolos são considerados instrumentos. Nessa transição surge a necessidade de novas ideias sobre os objetos matemáticos, então, os números começam a representar relações entre objetos e não objetos.

Nosso foco principal é investigar o renascimento, assimilação e transformação da Matemática Grega no século XVI e XVII do ponto de vista da mudança conceitual do número ocorrida durante essa assimilação, período este, que foi fundamental na elaboração de uma nova forma de compreender o número. De posse das questões epistemológicas da transformação no conceito de número nesse período, vamos tentar compreender as dificuldades atuais no tratamento do pensamento algébrico atual.

2. A Concepção Grega Antiga de Números

No livro de Jacob Klein (1992), o conceito grego de número, o arithmo para o entendimento dos Gregos Antigos é tratada como uma quantidade definida de coisas definidas. Dessa forma, esse conceito sugere estar associado ao aspecto “concreto”. Se isso procede, podemos dizer que esse fato pode ser um dos motivos pelo qual no ensino inicial da aritmética se preocupe mais com aspectos quantitativos, ou seja, polarizando a construção do conceito de número. No entanto, Klein apresenta outras possibilidades de interpretação, ou seja, não é inteiramente concreto – o número já era tratado como *representante de grandezas*, e a partir do século XVI e XVII passa a ser tratado como *representante de relação entre grandezas*.

A interpretação tradicional da aritmética grega era subdividida em duas partes denominadas Logística e Aritmética. A Logística se preocupa com cálculos práticos e na Aritmética a preocupação era com as propriedades e relações entre os números (Teoria dos Números). A Logística era menos importante que a Aritmética. Na obra de Klein está claro que essa subdivisão é incompleta, pois, considerava o aspecto prático e teórico, tanto na Logística como na Aritmética. Dessa forma, Klein apresentou as seguintes categorias: Logística prática, Logística Teórica, Aritmética Prática e Aritmética Teórica, que podem ser diferenciadas da seguinte forma:

> Para Platão, a "logística teórica" tem relação com a "logística prática", essa relação é semelhante ao que a "aritmética teórica" tem com a "aritmética prática". A “Logística teórica" e “aritmética teórica" ambos têm como objetos - em contraste com as correspondentes artes práticas (aritmética prática e logística prática) - coisas não experimentadas por meio dos sentidos, mas unidades “puras” indivisíveis que são completamente uniforme entre si e que pode ser compreendida como tal apenas no pensamento. Ambas as disciplinas teóricas decorrem diretamente, por um lado, da *contagem*, e por outro da *calculação*, ou seja, do ato de relacionar números uns com os outros, tanto no sentido de contar como de calcular; e a tarefa das disciplinas teóricas é reduzir essas atividades "práticas" para suas verdadeiras pressuposições. Os comentários neoplatonicos sobre as definições platônicas da aritmética e da logística em *Charmides* e *Górgias* mostram que neste "redução" a aritmética está preocupada com "tipos" de números, enquanto logística está preocupada com o seu "material" (KLEIN, 1992, p. 6 e 7. Nossa tradução).

A Logística Prática e Logística Teórica tratam de cálculos, porém, se diferenciam em relação ao tipo de arithmos a ser calculado, pois a teoria consistia de operações com inteligíveis (arithmos puros). Agora, a Aritmética Prática e a Aritmética Teórica tratam de contagem e da mesma forma se diferencia em relação ao tipo de arithmo, isto é, a Aritmética prática enumera coisas concretas, já a Aritmética Teórica trata de arithmos puros. Podemos dizer então que há uma hierarquia nessas subdivisões, a saber: Aritmética Prática – Logística Prática – Logística Teórica – Aritmética Teórica.

O aspecto contemplativo, teológico, metafísico e harmônico dos gregos Antigos na compreensão do conceito de número apresentava uma propriedade chamada *eidos.* Cada número tinha o seu *eido* ou "forma", "figura" ou "aspecto". Um fato importante na concepção grega Antiga de número é o entendimento do "um". Para os gregos o "um" não é número. O "*um*" era classificado como par e ímpar e por isso, participava da natureza de ambos, ou seja, gera, é a origem de todos os números. Segundo Aristóteles *o "um"* significa a medida de alguma pluralidade e o número, uma pluralidade de medida ou uma pluralidade de medidas. Dessa forma, naturalmente, o *um* não é número; a medida não é plural, mas tanto esta - a medida – quanto o *um* são pontos de partida.

O tratamento dado pelos Gregos Antigos ao conceito de número ainda estava "preso" no objeto e essa forma de relacionar com os objetos da Matemática foi reinterpretado nos séculos XVI e XVII. O número passa a ser considerado como um conceito abstrato, independente do objeto, como por exemplo, número três e não três unidades de alguma coisa. Essa transformação corroborou com o surgimento do simbolismo algébrico moderno.

3. A Reinterpretação da Aritmética e Logística: A Origem do Simbolismo Algébrico Moderno

A origem da Álgebra Moderna se faz presente na tensão entre síntese e análise (método e objeto) na Matemática Grega Antiga reinterpretada nos séculos XVI e XVII. Segundo Klein (1992), essa "nova" compreensão passa pela reinterpretação da Arithmética de Diophantus apresentada por Viète. Nessa obra Klein também argumenta que Viète partiu de dois trabalhos principais Gregos, o livro VII de Pappus (utilizando o método de Pappus) e a Arithmética de Diophantus, que são essenciais para o surgimento do simbolismo Algébrico Moderno.

Nos séculos XVI e XVII, na Matemática começou um processo de transição (*tensão*) em que por um lado havia o pensamento Antigo, que era predominantemente Grego e que tinha na Geometria sua abordagem principal e por outro lado a tentativa de resolver problemas geométricos de forma genérica, bem como usar o conhecimento acumulado Antigo na resolução de novos problemas. Nesse sentido, Viète (apud KLEIN, 1992, p. 154) disse que a maneira de investigar a verdade na Matemática, proposta primeiramente por Platão, o qual Theon de Alexandria denominou de análise.

> Segundo (KLEIN, 1992, p. 155) Theon definiu análise como um processo que parte da suposição daquilo que procuramos como se estivesse conhecido para chegar a uma verdade procurada, por meio de consequências, e a síntese, ao contrário é a suposição de uma coisa conhecida para chegar ao conhecimento daquilo que procuramos por meio das consequências.

Diante dessa concepção Platônica podemos dizer que a análise é a decomposição de um fato em termos mais simples e a síntese como um processo direto, ou seja, parte de termos mais simples para composição do fato.

A terminologia de Viète, ou seja, símbolo para representar números tem origem na forma em que Diophantus apresentou a solução de cada problema, pois em cada solução apresentada por Diophantus há "manipulações" de grandezas supostamente conhecidas (análise) e após essas manipulações encontra-se a possível solução. A partir daí, começa uma espécie de teste, ou seja, argumentos que mostram que essa solução satisfaz a situação apresentada inicialmente, chamada de *apodeixis*. Essas manipulações são elaboradas de acordo com as condições do problema, sendo representadas por identidades (equações). Essa forma detalhada que Diophantus utilizou na resolução dos problemas, Viète abstraiu, segundo (KLEIN, 1992, p. 156), no seguinte sentido: a construção de equações significa apenas colocar as condições de um problema numa forma que nos capacita ignorar se as magnitudes do problema são conhecidas ou desconhecidas.

Segundo (KLEIN, 1992, p. 242) a tensão entre método e objeto é expressa diretamente na diferença fundamental entre análise e síntese. Para (KLEIN, 1992, p. 162 e 163) a concepção fundamental dos objetos matemáticos certamente obtém em Diofhantus, ou seja, na medida em que nos seus problemas e soluções ele admite somente números de mônadas determinadas. Contudo, é precisamente por conta disso que o relacionamento (problemático) entre análise e síntese que é tradicional na geometria passa por uma mudança significativa na Aritmética de Diofhantus. Nas soluções de problemas geométricos a forma requerida parte em princípio da síntese (*apoideixis* - argumento da demonstração) e segue usando relações entre as magnitudes dadas, relações que são consideradas desde o início, que juntos fornecem a construção para mostrar que esta construção satisfaz as condições do problema apresentado.

Nos problemas aritméticos de Diofhantus, entretanto, o último passo da análise, ou seja, o cálculo final que produz o número procurado é ao mesmo tempo também o primeiro passo da síntese – o cálculo final realmente corresponde à construção geométrica. O processo de conversão de solução em Diophantus, portanto corresponde somente a segunda parte da "problemática" síntese na geometria. Agora, a maneira analítica de encontrar soluções em Diophantus e a problemática da análise em geometria é compreendida como processos completamente paralelos, como Viète de fato entendeu, há então, uma linha nítida que deve ser esboçado entre as transformações de equações e a computação dos números procurados, e isso em Diophantus não foi estabelecido.

Em outras palavras, a calculação termina "na indeterminação" (a solução que *o próprio Diophantus usa apenas como processo auxiliar, deve ser entendido como o verdadeiro problema analógico da análise na geometria*). Tal como uma solução indeterminada permite uma multiplicidade arbitrária de soluções "determinadas" com base em números que podem ser assumidos a vontade. Contudo, para Diophantus existem somente possibilidades limitadas para o uso deste processo, porque ele ainda associa com a suposição de números determinados. Aqui a comparação com a análise geométrica faz com que Viète vai além do trabalho de Diophantus.

No contexto do começo da utilização abstrata do conceito de número, está presente também, o trabalho de Stevin, que é considerado um dos responsáveis pela mudança na concepção de número no século XVI e XVII, ou seja, contribuiu para mudança de polo. Enquanto na Matemática Grega Antiga, a *epistéme* dominava a *téchne*, nos séculos XVI e XVII, a *téchne*[2] passa a dominar a *epistéme*. Nesse contexto, Stevin reclassificou a unidade – considerando-a um número como os demais. Segundo Stevin (apud Klein, p. 191), seu argumento principal é “s*e o número é formado por uma multiplicidade de unidades, então a unidade é uma parte do número. A parte deve ter a mesma natureza do todo, desta forma a unidade é um número. Rejeitar isso é como rejeitar que um pedaço de pão seja pão”*.

4. A Transformação no Conceito de Número: um exemplo[3]

No livro I da Aritmética de Diophantus há vários problemas resolvidos de forma detalhada. Vamos utilizar um desses problemas para tentar verificar como a transformação no conceito de Arithmo Grego Antigo possibilitou, nas mãos de Viète, por exemplo, o surgimento da Álgebra Simbólica Moderna.

Segundo (HEAT, 1910, p. 131), o problema é apresentado da forma: To divide a given number into to two having a given difference[4].

[2] No sentido da *téchne* dominar a *epistéme*, podemos dizer o seguinte: A maior parte dos matemáticos da época tinha preocupações técnicas e tecnológicas. Stevin era engenheiro, por exemplo. Provavelmente essas preocupações fizeram com que os números viessem desempenhar uma nova função: de medida, no sentido de construção de máquinas, navegação e balística.

[3] Este exemplo foi retirado de uma dissertação intitulada “Françoes Viète: o despontar da álgebra simbólica por Paulo Duarte Bastos Gil defendida em 2001 no Departamento de Matemática Pura da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto.

[4] Dividir um número dado em dois números em que a diferença também é dada.

> De acordo com (GIL, 2001, p. 75), Diophantus toma 100 como número dado e 40 como a diferença dada entre as partes. Resolve o problema considerando que o número mais pequeno era 1 *aritmo;* portanto, o maior número era 1 *aritmo* mais 40 unidades. Como consequência, a soma destes dois números era 2 *aritmos* mais 40 unidades. Associando termos semelhantes a termos semelhantes, obteve 2 aritmos igual a 60 unidades e, portanto, o arithmo valia 30 unidades. Assim os números procurados eram 30 e 70.

Nessa resolução apresentada, verificamos que o valor 100 e 40 são considerados condições necessárias na resolução desse problema específico, ou seja, em Diophantus não há preocupação em generalizar processo de resolução, que é um dos méritos dos séculos XVI e XVII. Por outro lado esse método de resolução pode ser generalizado, ou seja, pode ser aplicado em situações similares. No que diz respeito a letra para representar números desconhecidos – isso está implícito no trabalho de Diophantus, no momento em que o número procurado é considerado como 1 arithmo.

Na resolução apresentada por Viète, em sua logística especiosa[5], segundo (GIL, 2001, p. 75 e 76), Observe:

> Viète tomou *B* como a diferença entre as duas raízes e *D* como a sua soma. Repare-se na completa generalidade da abordagem de Viète, fruto da *logística especiosa,* enquanto que a *logística numérica* tinha forçado Diophantus a escolher valores particulares (40 para a diferença e 100 para a soma).
>
> Considerando *A* a menor valor[6], o maior valor era *A + B.* Logo, a soma das raízes era *2A + B* e*,* portanto, *2A + B* era igual a *D.* Por transposição, *2A* era igual a *D-B* e, dividindo ambos os membros por 2, *A* era igual a $\frac{D}{2}-\frac{B}{2}$. Viète considerou ainda que, se *E* fosse o maior valor, o menor valor era *E -B.* Logo, a soma dos valores era 2*E-B* e, portanto, 2*E -B* era igual a *D*. Por transposição, *2E* era igual *a D*

[5] Logística especiosa – trabalha com espécie genérica, ampliando a concepção logística numérica de Diophantus que utilizava números.

[6] Segundo a logística especiosa, Viète designava as quantidades desconhecidas por vogais.

> + *B* e, dividindo ambos os membros por 2, *E* era igual a $\frac{D}{2}+\frac{B}{2}$. Viète concluía assim que se podiam encontrar duas raízes, dadas a sua diferença e a sua soma. Com efeito,
>
> A metade da soma das raízes menos a metade da sua diferença é igual à raiz mais pequena; e as mesmas adicionadas é a maior raiz.
>
> Viète terminou exemplificando numericamente a solução encontrada. Tomando *B* igual a 40 e *D* igual a 100, *A* seria igual a 30 e *E* a 70. A escolha destes números comprova mais uma vez a ligação de Viète à *Aritmética* de Diophantus, pois são os mesmos que foram usados pelo matemático de Alexandria na resolução deste problema.

Na resolução apresentada por Viète está presente o início da manipulação de símbolos como representante de valores desconhecidos. Essa manipulação que teve origem em Diophantus é o ponto de partida de Viète no que diz respeito ao começo do Simbolismo Algébrico Moderno. Agora, o elo entre a logística numérica de Diophantus e a logística especiosa de Viète numa perspectiva de intencionalidade atual pode nos ajudar compreender as dificuldades do ensino do pensamento algébrico na atualidade.

5. Considerações finais

Neste momento temos a clareza de dizer que este artigo aponta pequenos caminhos no sentido de entender a linha temporal da origem construção do pensamento Algébrico Moderno, que na obra de Klein (1992), começou em Platão, Diophantus e depois consolida sua origem nas mãos de Viète.

Agora, como essa compreensão poder ser maximizada no sentido de fomentar o desenvolvimento do Pensamento Algébrico na atualidade? Há várias opções de trabalho, com a Geometria, por exemplo, porém neste momento abordamos a origem do Simbolismo Algébrico Moderno do ponto de vista da transformação conceitual do número. Diante disso, podemos dizer que se retomarmos o processo e o método usado por Diophantus na resolução de problemas como ponto de partida, e em seguida utilizar o método de Viète no tratamento do desenvolvimento de conceitos que tenha significados tanto sintático como semântico durante o processo de manipulação dos números, das operações e dos símbolos temos possibilidades de construir o Pensamento Algébrico na Educação Básica com sentido. Entendo também, que Álgebra explorada de forma retórica manifesta-se não só em Matemática como também em outras áreas do conhecimento, contribuindo no desenvolvimento do pensamento humano, na história do pensamento científico e na Educação Matemática na atualidade.

Referências

ABBAGNANO, N. **Dicionário de Filosofia**. 5 ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

BRANN, Eva. Jacob Klein's Two Prescient Discoveries. **The St. John's Review**, Annapolis, n.1, v.52, 2010. Disponível em: <http:www.stjohnscollege.edu/news/pubs/review.shtml> Acesso em 01de março de 2011.

_______Klein on Myth of Learning. **The St. John's Review**, Annapolis, n.1, v.51, 2009. Disponível em: <http:www.stjohnscollege.edu/news/pubs/review.shtml> Acesso em 01de março de 2011.

GIL, Paulo Duarte Bastos. **François Viète: o despontar da álgebra simbólica**. Porto: Faculdade de Ciências da Unicersidade do Porto - Departamento de Matemática Pura, 2001. Dissertação de Mestrado em Matemática – Fundamentos e Aplicações. Disponível em: <repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/.../3596_TM_01_C.pdf> Acesso 27 de fevereiro de 2011.

GOMES, Vicente de Paula. **Causalidade e Hermenêutica em Sociologia da Ciência: Uma Crítica ao "Programa Forte" de David Bloor**. Campinas: Departamento de Filosofia do Instituto de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Estadual de Campinas, 2008. Tese de Doutorado. Disponível em: http://cutter.unicamp.br/document/?code=vtls000445467&fd=y. Acesso em 15 de março de 2011.

HEALT, Sir Thomas. **Diophantus of Alexandria: A Study the History of Greek Algebra**. 2ª ed. New York: Dover Publications, 1964.

KLEIN, Jacob. **Greek Mathematical Thought and the Origin of Álgebra**. Trad. Eva Brann. New York: Dover Publications, 1992.

MALBERRY, J. P. **The Foundations of Mathematics in the Theory of Sets**. Disponível em: http://www.bristol.ac.uk/philosophy/department/staff/jpm/preface.pdf. Acesso em 01de abril de 2011.

OTTE, Michael. **O Formal, O Social e o Subjetivo: Uma Introdução à Filosofia e à Didática da Matemática**. Trad. Raul Fernando Neto. São Paulo – SP: Unesp, 1993.