



2º SIPEMAT

SIMPÓSIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

DE 28 DE JULHO A 1 DE AGOSTO **2008**

MATEMÁTICA FORMAL E MATEMÁTICA NÃO-FORMAL

20 ANOS DEPOIS: SALA DE AULA E OUTROS CONTEXTOS

O ESTUDO DE FUNÇÕES MEDIADO POR UM OBJETO DE APRENDIZAGEM

Antônio Luiz de Oliveira Barreto, José Aires de Castro Filho

Universidade Federal do Ceará. Brasil

alobarreto@yahoo.com.br; j.castro@ufc.br

RESUMO

O presente estudo investigou como o Objeto de Aprendizagem denominado Desafio Funções pode auxiliar na aprendizagem do conceito de funções. A pesquisa foi realizada em uma escola pública da rede estadual de Fortaleza com uma turma de 13 alunos do 1º Ano do Ensino Médio. A pesquisa baseia-se numa análise quantitativa e qualitativa. Os resultados obtidos indicam que a utilização deste Objeto de Aprendizagem mediada pela intervenção do professor foi uma ferramenta poderosa capaz de ampliar a aprendizagem do aluno e de detectar os principais obstáculos à construção do conceito.

Palavras-chave - Educação Matemática, Objetos de Aprendizagem e Funções.

1. Introdução

A álgebra é um tema que causa dificuldades aos alunos. Na passagem da aritmética para a álgebra, eles deparam-se com um grande obstáculo epistemológico, ou seja, reconhecer que letras podem representar valores e que símbolos matemáticos podem ter diversos significados. Outras dificuldades são a compreensão dos conceitos de variável e função e a manipulação de letras e a noção de sistema (Vergnaud, 1988).

Na álgebra, o conceito de função é extremamente importante, devido ao seu papel central na Matemática do Ensino Médio e em diversas disciplinas de formação básica nos cursos de graduação em Ciências Exatas, da Saúde e Sociais Aplicadas.

Investigações de diversos pesquisadores, (DUBINSKY & HAREL, 1992; RÊGO 2000; FOSSA & FOSSA, 2001) têm mostrado que as idéias de variável, domínio, contradomínio, imagem, zeros ou raízes de uma função trazem grande complexidade para a aprendizagem dos alunos. Está aí um dos motivos importantes em se estudar mais sobre este conceito junto aos estudantes.

Na escola, a álgebra é apresentada aos alunos através da mera manipulação de símbolos. Nos exercícios, a ênfase é dada ao raciocínio algorítmico, sem a devida preocupação se os alunos compreenderam ou não os conceitos envolvidos nele. A escola tradicional acredita que ao introduzir os símbolos e as regras, está se ensinando o próprio conceito matemático. Gimenez e Lins (1997) denominam de letrista essa concepção do ensino da álgebra, a qual entende que a atividade algébrica é cálculo literal, envolvendo apenas a seqüência técnica (algoritmo) e prática (exercícios).

Além disso, a linguagem presente nos principais livros textos de Matemática do Ensino Médio sofre influências do *Movimento Matemática Moderna*, fundamentada na *Teoria dos Conjuntos* (Rêgo, 2000). Muitos autores destes livros, ainda hoje, apresentam variações da definição de Bourbaki sobre funções: “Dados dois conjuntos não-vazios A e B, uma função de A e B é uma relação que a cada elemento x de A faz corresponder um único elemento y de B”. (IEZZI et al., 1993, p. 34).

Para o aluno, esta definição é extremamente abstrata, pois estão subjacentes vários outros conceitos tais como relação, par-ordenado etc. Além disso, como afirmam Fossa & Fossa (2001):

(...) o aluno raramente desenvolve uma concepção desta noção que chega a aproximar sua plena generalidade. De fato, a definição do conceito de função parece ter um papel bastante reduzido na determinação de como este conceito é entendido pelo aluno. Muito mais importante é a sua experiência com dois conceitos associados ao de função, a saber, equações e gráficos, pois quando o aluno encontra funções no seu livro texto ou na sala de aula, geralmente se pede que ele manipule de alguma forma uma equação que representa a função ou esboce o seu gráfico. Assim, o aluno é exposto a uma classe restrita de funções e, forçosamente, ele abstrai o seu conceito de função apenas desta classe (Fossa & Fossa, 2001, p.155).

Muitas propostas têm surgido para a superação das dificuldades no ensino e na aprendizagem de álgebra e funções. Uma dessas propostas envolve a construção de um núcleo de significados negociados entre professores e alunos, definidos por Gimenez e Lins (1997, p. 144) como

“(...) um conjunto de objetos já estabelecidos e em relação aos quais significado está sendo produzido. Um núcleo pode ser constituído por um diagrama, por um desenho, por uma balança, por um conjunto de princípios (axiomas, por exemplo), por uma situação “realista” ou ficcional. O que importa é que é em relação aos objetos do núcleo que vai ser produzido significado, seja para que texto for.” (Gimenez e Lins 1997, p. 144).

Por exemplo, em trabalhos com equações do primeiro grau e de resolução de problemas de modelagem algébrica¹ é muito comum utilizarmos a balança dois pratos para auxiliar a aprendizagem dos alunos. Nesse sentido, situações com a balança de dois pratos são adequadas para trabalhar com equações do tipo “ $3x + 10 = 100$ ”. Na passagem desta equação para a sua equivalente $3x=90$, o aluno pode produzir significados relacionado-a a metáfora de balança tendo a seguinte justificativa: “é como numa balança de dois pratos equilibrada: tiro 10 quilos de cada lado e continua equilibrada”, (Meira 1997; Gimenez e Lins, 1997).

Segundo Gimenez e Lins (1997), aqui temos um processo de conhecimento que está sendo produzido, uma crença-afirmação correspondente a uma nova aprendizagem. O aluno ao justificar estas passagens algébricas estabelece um vínculo entre crenças-afirmações e núcleos. No nosso caso, a crença-afirmação são as equações equivalentes $3x + 10 = 100 \rightarrow 3x=90$, e o núcleo é a balança de dois pratos. Na atividade da equação, ao falarmos sobre as passagens algébricas com suas justificativas baseadas na balança, estamos falando a respeito de objetos (equações e a balança de dois pratos). Assim, estamos produzindo significados.

Esses significados devem ser negociados em contextos bastante específicos, envolvendo situações-problema e algumas vezes, a uso de objetos de manipulação, tais como balança ou ambientes computacionais. Embora não sejam eles por si só que produzam significado, eles permitem o surgimento de momentos de negociação entre professores e alunos.

Diversos estudos com ambientes computacionais discutem a manipulação simultânea de múltiplas representações de aspectos ligados a função, tais como tabelas, gráficos e equações

¹ Meira (1997) define modelagem algébrica como o processo de criar equações para representar e estudar fenômenos (físicos, sociais, econômicos etc.).

(Confrey, 1992, Borba, 1999). Tais trabalhos abordam, por exemplo, a manipulação dinâmica de gráficos e como isso modifica a equação de uma função.

Outros trabalhos envolvem a relação entre representações algébricas de função e situações reais tais como velocidade, saldo bancário, usando software de simulação, sensores de movimento e outros aparatos tecnológicos (Castro-Filho & Confrey, 2001).

Rêgo (2000) aponta como vantagens de recursos tecnológicos para o conceito de funções:

...sua eficiência como ferramenta de manipulação simbólica, no traçado de gráficos e como instrumento facilitador nas tarefas de resolução de problemas. A utilização de computadores no ensino provocaria, a médio e longo prazo, mudanças curriculares e de atitude profundas uma vez que, com o uso da tecnologia, os professores tenderiam a se concentrar mais nas idéias e conceitos e menos nos algoritmos (Rêgo, 2000, p. 76).

Essa possibilidade de software e aparatos tecnológicos permite que professores e alunos estabeleçam diálogos sobre os conceitos subjacentes à manipulação feita e os resultados apresentados.

Uma limitação desses trabalhos é que nem sempre essas investigações têm sido conduzidas em situações escolares formais. Com o intuito de investigar como os alunos resolvem questões envolvendo conhecimentos sobre interpretação gráfica, o presente trabalho tem como objetivo observar como o uso de um objeto de aprendizagem² pode ajudar na compreensão destes conhecimentos.

Como objetivo específico, pretendemos identificar e categorizar as dificuldades e a produção de significados empregados pelos alunos durante a resolução destas questões em situações envolvendo lápis e papel e o uso de um ambiente computacional³. Os procedimentos metodológicos do estudo estão descritos a seguir.

2. Procedimentos Metodológicos

Esta pesquisa foi realizada em uma escola pública de Fortaleza com uma turma de 1º ano do ensino médio. O número de sujeitos foram 13 alunos. O material usado na pesquisa

² Recursos digitais (vídeo, animação ou software) os quais permitem que professores e alunos explorem conceitos específicos em áreas do conhecimento como matemática, ciências entre outras. Diferem de softwares educativos por serem pequenos e focados em um objetivo específico de aprendizagem (Castro-Filho, 2007).

³ Este estudo faz parte de uma tese de doutorado do primeiro autor.

envolveu um teste diagnóstico, um objeto de aprendizagem intitulado Desafio Funções e uma atividade, resolvidos com lápis e papel. O material foi aplicado na seguinte seqüência: teste diagnóstico, objeto de aprendizagem e atividade. Os materiais estão descritos em detalhe a seguir:

Teste diagnóstico – continha questões com assuntos ligados a interpretação de gráficos tais como: localização de pontos no plano cartesiano, crescimento e decrescimento de funções, a análise de intervalos constantes e a determinação do valor máximo e mínimo da função dentro de um intervalo. Tal teste foi aplicado antes da exploração do OA Desafio funções.

Objeto de Aprendizagem Desafio Funções (OA DF)⁴: o objeto de aprendizagem *Desafio Funções* trabalha com localização de pontos no plano cartesiano e conceitos envolvendo situações como despesas, receitas e lucros. Conceitos ligados a funções como crescimento e decrescimento também podem ser explorados. O objeto de aprendizagem possui três atividades.

Na primeira atividade, o aluno trabalha com a localização de pontos no plano cartesiano no contexto de despesa mensal de uma empresa. Na segunda atividade, o aluno depara-se com crescimento e decrescimento de funções, envolvendo despesa, receita e lucro de uma empresa. A terceira e última atividade consiste na manipulação dos parâmetros a, b e c de uma função quadrática a fim de obter um lucro máximo (figura 1).



Figura 1 - Telas do OA desafio funções

Atividade com lápis e papel – dividida em duas questões. A primeira questão continha seis itens sobre os mesmos assuntos abordados no teste diagnóstico, só que aqui, ligadas ao contexto de despesas. A segunda questão estava dividida em cinco itens, que assim como a anterior, contêm os mesmos assuntos do teste diagnóstico, só que desta vez, ligadas aos conceitos de despesas, receitas e lucros.

Durante a resolução das atividades pelos alunos, o pesquisador realizou entrevistas e observações. As entrevistas foram gravadas e as observações anotadas em um Diário de Campo, no qual cada experiência dos alunos foi registrada em um maior número possível nas suas manifestações concretas. Os resultados do estudo estão apresentados a seguir.

⁴ Disponível em rived.proinfo.mec.gov.br ou www.proativa.virtual.ufc.br.

3. Resultados

Os resultados foram analisados, usando uma abordagem qualitativa e quantitativa, descritas a seguir.

Análise quantitativa

Antes de se fazer o teste t de Student para dados emparelhados, verificou-se a normalidade dos dados por meio do teste de Kolmogorov-Smirnov, conforme mostra tabela abaixo.

Tabela 1 – Teste Kolmogorov-Smirnov

	Teste diagnóstico	OA DF
Z de Kolmogorov-Smirnov	0,671	0,531
P	0,759	0,941

Como os resultados do teste diagnóstico e da atividade com o OA - DF apresentaram normalidade, procedeu-se ao o Teste t de Student para dados emparelhados.

Tabela 2 – Teste t de Student

	Nº. de Alunos	Média	Desvio	Mínimo	Máximo	Percentis		
						25 (Q1)	50 (Mediana)	75 (Q3)
Teste Diag	13	62,82	20,23640	29,08	100	44,7913	64,75	73,9588
Des. Func.	13	78,96	16,152	53	100	67,50	74,50	96,50

Tabela 3 – Nível de Significância

	t	p
Par 1 Teste Diag.– Des. Func.	-3,718	0,003

Como se observa na tabela 3. o resultado do teste implica que houve uma diferença entre as médias das duas atividades, sendo essa estatisticamente significativa ($p = 0,003$). Os resultados presentes na tabela 2 indicam o percentil 75 (Q3) significando dizer que, no grupo DF, 25% dos alunos acertaram acima de 96,5; enquanto no pré-teste, 25% dos alunos acertaram apenas acima de 73,96%. Além disso, observando a figura 2, nota-se que no teste diagnóstico a amplitude de variação das respostas é muito maior do que no grupo DF.

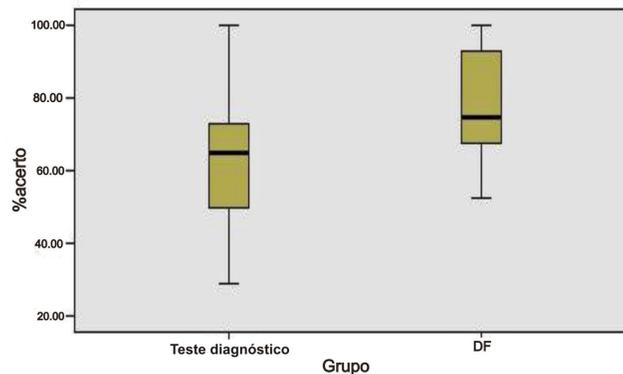


Figura 2 - Amplitude de variação das respostas

A melhora com DF foi de 25,7% a mais de acerto. Verificou-se, ainda, que o DF apresentou maior homogeneidade nas respostas, pois esse teve um coeficiente de variação de 20,5% (16,1/78,96), enquanto que o teste diagnóstico teve um coeficiente de variação de 32,2% (20,23/62,82).

Tais resultados indicam que utilizar o OA DF favoreceu o desempenho de alunos na resolução das questões envolvendo localização de pontos no plano e análise de variação da função dentro de um intervalo (funções crescentes, decrescentes e constantes).

Para corroborar mais esses dados, procedeu-se a análise qualitativa, a qual está descrita a seguir.

Análise qualitativa

Para a análise qualitativa, identificamos as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução de questões relativas a conhecimentos sobre interpretação gráfica em situações envolvendo lápis e papel e como o uso do OA Desafio Funções auxiliou na superação dessas dificuldades, ao propiciar momentos de negociação entre o professor e os alunos.

Uma das dificuldades encontradas foi na localização de pontos no plano cartesiano, ocorrendo quando o aluno confunde abscissa com ordenada e tem grande dificuldade de localizar um ponto pertencente o eixo horizontal ou vertical. O protocolo a seguir⁵ ilustra como a produção de significados no contexto do OA, auxiliou uma aluna (Cristina⁶) na superação dessa dificuldade, durante a manipulação do Objeto de Aprendizagem pela aluna.

1. E: [...ao explorar o Objeto de Aprendizagem, a aluna movimentava o mouse horizontalmente e verticalmente, observando respectivamente a variação dinâmica dos meses e dos lucros (ver figura 2). Ela já tinha marcado corretamente o mês de maio que correspondia -32000 e agora, o seu objetivo era marcar o lucro do mês de junho que

⁵ As letras “A” e “E” correspondem respectivamente a “Aluno” e “Entrevistador”. Transcrevemos as falas dos alunos sem corrigir os erros de português e o uso coloquial das palavras.

⁶ Pseudônimo.

correspondia a R\$ -36000. Todavia, após esta exploração preliminar, ela posicionou o mouse fazendo a “mira” posiciona-se no intervalo [30000, 40000].

2. E: - Me diga uma coisa, você não marcou o lucro igual a -32000?
3. A: - Ahã.
4. E: - Agora, você quer marcar o -36000 e está manuseando o mouse de tal forma que a seta está entre 30000 e 40000, por quê?
5. A: - [A aluna ficou calada por um pequeno período de tempo e continuou a manusear o mouse posicionado a “mira” em torno 4000].
6. A: - Mas professor faz é descer?
7. E: - E você pensava como?
8. - Eu marquei o -32000 e achei que o -36000 fazia era subir.
9. E: - Por que você achar que fazia era subir?
10. A: - Não é maior o -36000?
11. E: – Eu sei que você está marcando os lucros. Mas vamos imaginar a seguinte situação. Se você deve 36000 e eu devo 32000, qual dos dois está em mais desvantagem?
12. A: - Como assim?
13. E: – Qual dos dois está perdendo mais? Associe a dívida com os números negativos.
14. A: - O Senhor!
15. E: - Então aonde você vai colocar o -36000?
16. A: - Em baixo do -32000.
17. A: [A partir deste insight a aprendiz marcou corretamente a ordenada $y = -36000$].

No protocolo, observa-se que a aluna ao manipular o Objeto de Aprendizagem Desafio Funções estava com dificuldade de marcar o lucro negativo (linhas 2 a 5). Todavia, a partir de perguntas específicas (linhas 2, 4, 7 e 9) e da constituição de um novo núcleo - uma situação ficcional da “pessoa devedora”- feitas pelo pesquisador, a aluna começou a atribuir significados para a comparação de números inteiros culminando com a correta localização da ordenada negativa. Assim, temos um novo conhecimento sendo construído (comparação de números inteiros e marcação de lucros negativos em espaços bidimensionais) que na perspectiva de Lins e Gimenez (1997) é uma crença-afirmação. Através de uma situação realista de duas pessoas devedoras, chegamos a um núcleo, um objeto sobre o qual a aluna começou a pensar a respeito e a produzir significados, alcançando uma justificativa: “o professor está perdendo mais porque está devendo mais”.

Neste processo dinâmico, houve uma negociação de significados, pois o professor ao constituir um novo núcleo abriu um processo de negociações com a aluna, ou seja, ela começou a operar em relação a esse novo núcleo e passou a produzir significados para a tarefa. Outras considerações sobre o uso do Desafio Funções serão feitas a seguir.

4. Considerações Finais

Durante a realização da intervenção e na fase de análise de dados da presente pesquisa, observamos as dificuldades dos alunos quanto à localização de pontos no plano cartesiano e interpretação gráfica de uma função.

Essa defasagem dos alunos em localizarem pontos no plano cartesiano, já tinha sido apontada por Chaves e Carvalho (2004), quando constataram, em uma pesquisa feita com uma turma do Primeiro Ano do Ensino Médio, a dificuldade de alguns alunos entenderem um ponto como par ordenado. Como os autores salientam: “esta ‘âncora’ para a formação do conceito de função precisa estar muito bem “atracada” uma vez que muitos outros conceitos relativos à construção do conceito de funções dependem dela”, (Albuquerque Chaves e Carvalho, 2004, p. 8). Todavia, após a exploração do Objeto de Aprendizagem Desafio Funções, como vimos na análise estatística, houve um aumento significativo de desempenho dos alunos em relação a estes conteúdos, revelando ainda uma menor dispersão de conhecimentos. Além disso, o OA criou um contexto para que uma negociação de significados pudesse ser feita, uma âncora no entender de Chaves e Carvalho (op. cit.).

Uma das grandes vantagens de se ter trabalhado com o Desafio Funções, ao invés de trabalhar com situações convencionais de sala de aula, foi a possibilidade de o aluno localizar pontos dinamicamente. Assim, por exemplo, ao marcar a despesa referente ao mês de maio, o aluno manuseando o mouse, visualiza dinamicamente os meses e os valores relativos às despesas, percebendo as dimensões do espaço bi-dimensional.

Além disso, outro potencial deste objeto de aprendizagem é inserir os alunos em uma situação de mundo real, onde o aluno é um gerente de uma empresa que irá lidar com os conceitos de despesas, receitas e lucros. Com isso, o aluno pôde construir conhecimentos, produzindo significados aos conceitos matemáticos em relação a estes três núcleos (GIMENEZ E LINS (1997).

Este diferencial foi possível pelo uso das situações presentes no OA e da negociação de significados entre os alunos e o professor-pesquisador.

Atualmente, no ensino médio, o estudo de funções é voltado essencialmente para álgebra, ou seja, para a expressão analítica de uma função. Os alunos pouco estudam as representações

gráficas ou tabulares das funções matemáticas. Acreditamos que o motivo maior de focar mais aquela representação se deve ainda à ênfase no raciocínio algorítmico praticando a seqüência técnica (algoritmo) / prática (exercícios) objetivando a aprovação no vestibular. Além disso, como argumentam Borba e Penteado (2001, p. 29): “tal destaque muitas vezes está ligado à própria mídia utilizada. Sabemos que é difícil a geração de diversos gráficos num ambiente em que predomina o uso de lápis e papel e, então, faz sentido que não se dê muita ênfase a esse tipo de representação”.

Esses autores lembram que, no final dos anos 1980 e início dos anos 1990, muitos pesquisadores já alertavam para essa perigosa tendência do ensino de funções e propunham que as funções deveriam ser estudadas por representações múltiplas. Para eles, o interessante não era só privilegiar um tipo de representação e, sim, diferentes representações para uma mesma função: a expressão algébrica, o gráfico e a tabela. Todavia, esse estudo de diferentes representações não deve ser isolado, mas de uma maneira coordenada. “Assim, conhecer sobre funções passa a significar saber coordenar representações. Essa nova abordagem só ganha força com ambientes computacionais que geram gráficos vinculados a tabelas e expressões algébricas” (BORBA E PENTEADO, 2001, p. 30).

Nesse sentido, o OA Desafio Funções cumpre este papel, ou seja, de conectar as múltiplas formas de representação de função. Muitas vezes, numa aula tradicional e sem recursos computacionais, dificilmente o professor consegue detectar as principais dificuldades conceituais dos alunos sobre o estudo do conceito de funções. Por meio da realização desta pesquisa, foi possível identificar algumas dificuldades dos alunos quando eles estavam explorando o OA Desafio Funções. Nesse sentido, pode-se concluir que a utilização de ferramentas computacionais é de grande auxílio ao professor na medida em que podem ser detectados os principais obstáculos à elaboração conceitual.

5. Referências

BORBA, Marcelo C. Tecnologias informáticas na Educação Matemática e Reorganização do pensamento. In: Bicudo, M. A. V. (Org.). **Pesquisa em Educação Matemática**: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999, v. 1, p. 285-295.

BORBA, M. G.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

CASTRO FILHO, J. A.; CONFREY, Jere . Interactive Diagrams: Investigating Java-Applets for Learning Mathematics. In: CONGRESSO DA SOCIEDADE BRASILEIRA DA COMPUTAÇÃO, 21., 2001, Fortaleza. **Anais...**Fortaleza: Sociedade Brasileira da Computação, 2001.

CASTRO FILHO, J. A. . OBJETOS DE APRENDIZAGEM E SUA UTILIZAÇÃO NO ENSINO DE MATEMÁTICA. In: IX ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 2007, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte - MG : SBEM - Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007. v. 01.

CHAVES, M. I. A., CARVALHO, H. C. Formalização do conceito de função no ensino médio: uma seqüência de ensino-aprendizagem. In: VII Encontro Nacional de Educação Matemática, 2004. **Anais de VII ENEM.** Recife: Videolar, 2004. 1 CD.

CONFREY, J. (1992). Using computers to promote students' inventions on the function concept. In S. Malcom , L. Roberts, and K. Sheingold (eds.). **The year in school science 1991.** (pp. 141-174). Washington , DC : American.

DUBINSKY, E.; HAREL, G. The nature of the process conception of function. In: DUBINSKY; HAREL (Ed.). **The concept of function - aspects of epistemology and pedagogy**, M.A.A. Notes, v. 25, p.85-106, 1992.

FOSSA, John Andrew; FOSSA, Maria Da Glória. **Funções, equações e regras.** Ensaios sobre a educação matemática. Belém: PA EDUEPA, 2001.

GIMENEZ, J.; LINS, R. C. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI.** 2ª ed. Campinas,: Papyrus Editora, 1997.

IEZZI, Gelson et al. **Matemática, 2.º Grau.** 6ª ed. São Paulo: Atual, 1993. Vol. 1.

MEIRA, Luciano L. Educação Algébrica e Resolução de Problemas: Significados e modelagem algébrica, 1997. Salto para o futuro/ Tv Escola. Disponível em: <www.tvebrasil.com.br/salto>. Acesso em: 17 fev. 2008.

RÊGO, R. G. **Um estudo sobre a construção do conceito de função.** 2000. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

VERGNAUD G. Theoretical frameworks and empirical facts in the psychology of mathematics education. In: THE INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 6., 1988, Budapest. **Anais...**Budapeste: 1988. p. 39-41.