BALANÇA INTERATIVA: Um ambiente para auxiliar o progresso das operações aritméticas para a álgebra[1]

José Aires de Castro Filho

Introdução

Pesquisas recentes em Informática Educativa e Educação Matemática têm mostrado a relevância do computador como uma ferramenta para aprendizagem da Matemática. Resultados indicam, por exemplo, que software como o Cabri-Geometre (Baulac, Belleiman & Laborde, 1990) auxiliam o desenvolvimento de conceitos geométricos (King, 1997, Dennis and Confrey, 1997, Holzl, 1996). No entanto, o software educativo nem sempre tem chegado à sala de aula em parte pela ausência de computadores nas escolas, o que vem sendo gradativamente solucionado com o apoio de programas governamentais como o PROINFO.

No entanto, mesmo quando os computadores e software chegam à escola, sua utilização é muitas vezes superficial e aquém às possibilidades educacionais fornecidas pela tecnologia. Na maioria das escolas, os computadores estão localizados em laboratórios com atividades desvinculadas do conteúdo trabalhado em sala de aula (Papert, 1994). Essa realidade é causada em parte pela falta de experiência do professor na utilização dos programas aliada, à complexidade das ferramentas. Professores levam em geral um tempo considerável para aprender a usar alguns dos software educativos existentes (Confrey, 1992). Essa dificuldade tem levado muitas escolas ensinarem somente pela formação no uso do computador. Essa posição defende que a familiaridade com a tecnologia permitiria um posterior uso de ferramentas computacionais no ensino de conteúdos específicos. Um problema com essa abordagem é que o desenvolvimento de habilidades com tecnologia e a possibilidade de usar o computador para auxiliar o desenvolvimento de conceitos são tratados em separado.

Nos últimos anos, Castro-Filho e outros autores tem conduzido investigações acerca de ferramentas interativas que podem ser usados como catalisadores para o uso de software mais complexos (Castro-Filho, 2000, Castro-Filho & Confrey 1998, Castro-Filho, Confrey, Wilhelm & Meletiou, 1999, Confrey, Castro-Filho & Maloney, 1997, Confrey, Castro-Filho & Maloney, 1998, Confrey, Castro-Filho, & Wilhelm, 2000, Wilhelm, Confrey, Castro-Filho &

[1] Programadores da versão 1.0 - Gustavo Gonçalves Pires Neto e Cláudio Bezerra Leopoldino, bolsistas do Programa PIBIC da Universidade Federal do Ceará.

Maloney, 1999). Esses aplicativos diferem de software como Cabri porque ao invés de serem um ambiente completamente aberto de exploração, são projetados para permitirem a investigação de conceitos específicos em matemática. Elas são também simples de usar e instalar, não requerendo nenhum treino extensivo em tecnologia. Portanto, ao utilizá-los, os professores podem se concentrar nos aspectos pedagógicos e de conteúdo.

Há uma diferença entre esses tipos de aplicativos e outros software tradicionalmente encontrados para o ensino de matemática. Muitos dos software comerciais são simples de usar mas constituem-se uma reprodução de métodos tradicionais como o ensaio e erro, a repetição ou a instrução programada (Carraher, 1992, Valente, 1996). Carraher (1992) defende que um software para o ensino de matemática deveria estar fundamentada em uma concepção de aprendizagem que obedeça alguns critérios: deve estar baseada em concepções construtivistas, ou seja, ao invés de passar o conhecimento pronto aos alunos, os software deve permitir que eles manipulem objetos na tela e a partir de suas reflexões sobre essa manipulação elaborem hipóteses sobre o que está acontecendo. Ao mesmo tempo, um software para o ensino de matemática deve estar baseado em teorias que lidam com questões específicas do conhecimento matemático, enfatizem múltiplas representações dos conceitos (Confrey, 1994) e propicie processos de mediação por parte do professor (Vygotsky, 1984). Essa mediação é fundamental pois não podemos esperar que conhecimentos formais já estabelecidos na matemática sejam completamente reinventados pelos alunos.

Nesse trabalho discutimos um software denominado "Balança Interativa," que objetiva auxiliar naa passagem das operações aritméticas ao pensamento algébrico. Sua concepção está baseada em estudos sobre a aprendizagem da álgebra com auxílio da balança de dois pratos. Ao mesmo tempo, como será discutido mais adiante, o software amplia algumas das situações encontradas nos estudos anteriores. Iniciamos o trabalho discutindo as dificuldades inerentes ao chamado campo conceitual da álgebra (Vergnaud, 1985). Em seguida, abordamos estudos que utilizaram a balança de dois pratos como forma de ajudar os alunos a superar essas dificuldades. Descrevemos as características do software, enfatizando as diferenças em relação à balança de dois pratos e como essas diferenças favorecem o surgimento do pensamento algébrico. Logo após, discutimos algumas das estratégias que têm sido observadas na utilização do programa por alunos e professores. Ao final do trabalho, faremos algumas considerações finais sobre a aprendizagem da álgebra e o uso de software educativos.

Dificuldades dos alunos com álgebra

Matemática é uma disciplina considerada difícil por professores e alunos. Essas dificuldades aumentam à medida que os alunos passam a estudar álgebra. Resultados do sistema permanente de avaliação do estado do Ceará (SPAECE) comprovam essa afirmação. Em uma avaliação realizada em 1998 (SPAECE, 1998), as médias obtidas em Matemática foram 3,45 na 4ª série e 2º ciclo. Segundo o mesmo SPAECE, a média na 8a. série foi de apenas 2,17 (nota máxima 10) com nenhum município apresentando média superior a 3,00. O relatório afirma ainda que na 8a. série, nenhum aluno conseguiu nota superior a 6 e alguns alunos não resolveram nenhum item do teste.

As dificuldades da álgebra são provocadas pela ruptura entre o pensamento aritmético e o algébrico e pela forma como a álgebra é introduzida e ensinada na escola. Com relação ao primeiro aspecto, Gimenez e Lins (1997) afirmam que a álgebra e a aritmética podem lidar com os mesmos problemas, mas utilizam procedimentos e instrumentos conceituais diferentes. Enquanto a aritmética enfatiza a obtenção de respostas através de cálculos, a álgebra, prioriza a representação do problema através de equações e só posteriormente a realização dos cálculos sobre as equações (Lessa, 1996). Da Rocha Falcão (1993) também corrobora esse ponto de vista, afirmando que a álgebra se caracteriza como:

> "um conjunto de conceitos e procedimentos (algoritmos) matemáticos que permitem a representação prévia e a resolução de um determinado tipo de problema para o qual os procedimentos aritméticos mostram-se insuficientes."

Essas diferenças provocam algumas dificuldades conceituais quando os alunos encontram álgebra pela primeira vez. Cortes, Vergnaud e Kavafian (1990) colocam que uma das dificuldades surge no conceito de equação. Na aritmética, uma equação é meramente uma abreviação dos processos de cálculo, utilizada para aliviar a carga de memória. Em álgebra, uma equação é usada para estabelecer uma relação entre os valores conhecidos e o valor desconhecido do problema. A equação é então utilizada para encontrar esse valor desconhecido.

Uma outra diferença entre a álgebra e aritmética é o sentido atribuído ao símbolo "=". Na aritmética, esse símbolo mais comumente significa o resultado de uma operação. Esse sentido é reforçado pelo uso do "=" na calculadora para finalizar a operação (Cortes, Vergnaud e Kavafian, 1990, Lessa, 1996). Em álgebra, o sinal de igualdade possui outros significados. Um desses significados é o de estabelecer uma relação de equivalência ou igualdade entre dois membros da equação. Essa ruptura estabelece implicitamente uma idéia importante da álgebra, a de que os símbolos são utilizados para representar relações e não apenas operações. Isso fica mais visível ao lidar-se com relações que envolvem desigualdade (inequações). Nesse caso, os símbolos não podem ser utilizados para encontrar o resultado de uma operação. Essa sentido relacional não é bem compreendido pelos alunos pela falta de referenciais que dêem significado aos símbolos.

Não reconhecer essas diferenças conceituais é um dos fatores que provoca dificuldades no ensino da álgebra. Entendendo essas diferenças, pode-se buscar estratégias para introduzir esses conceitos aos alunos. Uma outra dificuldade relacionado com o ensino é que a escola tradicionalmente enfatiza as regras para manipulação de símbolos e resolução de equações, uma tendência denominada de "letrista" por Gimenez e Lins (1997). Acredita-se que ao introduzir os símbolos e as regras, está se ensinando o próprio conceito matemático. Vergnaud (1985) também critica essa posição, ao afirmar que um conceito matemático é composto por três conjuntos interligados: as situações em que o conceito é usado, os invariantes ou propriedades lógicas subjacentes ao conceito e as representações utilizadas para representar o conceito. A escola tradicionalmente trabalha apenas com um dos elementos desse conjunto, as representações e mesmo assim, somente no nível formal, não aceitando que um conceito possa utilizar diversos tipos de representações.

Muitos professores, principalmente no ensino fundamental, não possuem a compreensão das razões implícitas no uso de determinadas regras. Tem-se um bom exemplo ao resolvermos uma equação como $x+3=5$. O método ensinado na escola é que o 3 muda de lado e troca de sinal ($x=5-3$). Embora esse algoritmo possa ser memorizado e utilizado de forma mecânica, não existe nenhuma justificativa para essa regra a não ser que ela foi "ensinada" pelo(a) professor(a). O que não é ensinado ou discutido é que essa regra é uma simplificação da idéia de que colocando-se ou retirando-se quantidades iguais dos dois lados da equação, a equivalência permanece. Portanto, o que se está fazendo é uma simplificação de $x+3-3=5-3$, o que leva a $x+0=5-3$ e $x=5-3$, $x=2$.

Em conclusão, podemos dizer que as dificuldades com álgebra provém das rupturas provocadas na mudança do pensamento aritmético ao pensamento algébrico e do ensino excessivamente formal dado na escola. Para superar essas dificuldades é importante compreender as idéias fundamentais pertencentes a álgebra e criar estratégias para introduzir esses conceitos de forma significativa.

Introduzir os alunos no pensamento algébrico envolve introduzir as idéia de incógnita, de equação e do sinal “=” como uma relação (Vergnaud, 1997, Lessa, 1996). Diversos autores têm proposto a balança de pratos como uma forma de introduzir os alunos a essas noções de variável e de equações(Filloy & Rojano, 1984, Vergnaud & Cortez, 1986). Nesse caso, a igualdade em expressões como x+2=5 seria expressa pelo equilíbrio da balança. Ao mesmo tempo, ao manipular as quantidades, os alunos estariam descobrindo os valor das incógnitas e compreendendo o significado da manipulação dos símbolos. A seguir, analisaremos alguns desses estudos.

Estudos sobre a Balança de Pratos como ferramenta para introdução ao pensamento algébrico

Carraher & Schliemann (1988) estudaram a utilização da balança de pratos por vendedores na feira. Na época do estudo, esse tipo de balança era muito utilizado em feiras livres do nordeste. O trabalho é parte de uma série de estudos mais amplos que analisam o desenvolvimento de habilidades cognitivas a partir de atividades cotidianas (Carraher, Carraher & Schliemann, 1988). Após uma fase inicial, em que os sujeitos eram solicitados a pesar 400 e 900 gramas de mercadorias, os autores realizaram duas tarefas de transferência, uma envolvendo a obtenção de três volumes diferentes (4 litros, 9 litros e 9½ litros) a partir de recipientes e a outra a de encontrar pesos desconhecidos a partir de representações icônicas da balança. Nessa tarefa de pesos, três tipos de problema foram usados. No primeiro tipo, havia pesos desconhecidos apenas em um dos lados da balança (ex: $1500 = 100 + x$). No segundo tipo, havia duas incógnitas ($500 + x = 100 + x + y$), sendo que uma das incógnitas encontrava-se dos dois lados da balança e portanto podia ser cancelada. No último tipo, havia apenas uma incógnita em ambos os pratos da balança ($500 + 2x = 250 + 3x$). Nesse caso, os sujeitos deveriam cancelar pesos desconhecidos e iguais antes de chegar a solução do problema.

Na tarefa de volumes, os pesquisadores observaram que os sujeitos tinham alguma dificuldade em obter o volume de 4 litros espontaneamente mas que ao fazer uma referência à situação da balança e a forma de obter pesos através da subtração, os sujeitos melhoravam o desempenho consideravelmente. Na tarefa de pesos, os sujeitos não tiveram dificuldades em transferir as habilidades do contexto prático para o contexto hipotético. Nessa segunda tarefa, os autores apontam o uso de duas estratégias pelos sujeitos. Na manipulação de incógnitas, os sujeitos retiravam pesos desconhecidos iguais dos dois pratos da balança, compreendendo que o equilíbrio seria mantido. Uma outra estratégia utilizada foi o teste de hipóteses em que os sujeitos atribuíam valores aos dados e verificavam se esses valores satisfaziam o equilíbrio. Embora a manipulação de incógnitas não tenha surgido espontaneamente em todos os sujeitos, ela foi apreendida por uma grande porcentagem deles, um fato a ser considerado importante em função da baixa escolaridade dos sujeitos. Os autores concluíram que na utilização da balança no cotidiano, os sujeitos aprendem mais do que apenas uma rotina mecânica de pesar. Eles aprendem pelo menos a idéia de manipulações de medidas e equivalências, e que pode ser utilizada como base para a compreensão de equações e incógnitas.

Enquanto Carraher e Schliemann (1988) discutiram o uso da balança em situações da vida cotidiana, outros autores analisaram seu uso no contexto escolar. Cortez, Vergnaud e Kavafian (1990), por exemplo, solicitaram a alunos de 7ª. e 8ª. série que escrevessem uma equação para representar uma balança em equilíbrio contendo bilas e pesos conhecidos em um prato e pesos conhecidos em outro prato. O autores observaram que no início, os alunos utilizavam uma solução aritmética, usando a equação simplesmente como um resumo para as operações a serem realizadas. O uso de uma solução algébrica, incluindo a manipulação de símbolos nas equações foi negociado com os alunos ao longo do trabalho e a balança de pratos foi utilizada como ferramenta para estabelecer o significado de equações e manipulações simbólicas com os alunos.

Meira (1996) investigou o uso de uma representação esquemática da balança de dois pratos como elemento mediador no desenvolvimento da compreensão de álgebra como uma linguagem especializada para a resolução de problemas. O autor analisou uma seção de resolução de problemas com dois estudantes da 7ª série e a compreensão destes alunos acerca de equivalências algébricas e manipulação simbólica. Os alunos encontraram soluções para os problemas envolvendo pesos conhecidos e desconhecidos mas apresentaram dificuldades em representar as configurações e manipular as equações de forma simbólica. Meira (op. cit.) apontou que mesmo com essas dificuldades, os alunos conseguiram escrever e resolver uma equação após uma referência ao mecanismo de funcionamento da balança em que os pesos estão em diferentes pratos e que o equilíbrio deve ser mantido. Através dessa analogia os estudantes gradualmente atribuíam significado para ações que usualmente não possuem sentido na prática escolar, tais como a manipulação simbólica e o uso de equações. O autor mencionou ainda que o estudo não se propunha a analisar o uso da balança em específico, mas a atividade de estudantes ao lidar com instrumentos e metáforas freqüentemente usados no ensino de matemática. Apesar disso, seus resultados indicam que a balança serve como metáfora para os conceitos de equivalência e de manipulação simbólica.

Lessa (1996) investigou o treinamento com resolução de problemas em duas condições: a balança de dois pratos e em problemas verbais com quarenta alunos da 5ª. série. O estudo verificou que a compreensão de diferentes aspectos da álgebra é favorecida em cada uma das condições. A situação da balança auxilia no desenvolvimento das noções de igualdade entre os membros de uma equação, o significado de uma incógnita e a manipulação de incógnitas, especialmente no que diz respeito a idéia de que retirando (ou adicionando) quantidades iguais nos dois lados da balança, o equilíbrio é mantido e a igualdade permanece. Já os problemas verbais favorecem a compreensão da representação, em especial do uso de símbolos e sua manipulação. Ao invés de serem situações alternativas, contemplando os mesmos conceitos, o uso da balança e dos problemas verbais podem ser visto como complementares, contemplando conceitos diversos.

Existem vários outros estudos realizados sobre o uso da balança na compreensão de conceitos algébricos (Filloy & Rojano, 1984, Vergnaud & Cortez, 1986, Schliemann, Lima & Santiago, 1992, Da Rocha Falcão, 1995). O que esses estudos apontam é que balança apenas favorece o surgimento desses significados, mas os mesmos têm de estar estabelecidos dentro de uma cultura, seja a cultura de práticas comerciais cotidianas como no estudo de Carraher e Schliemann (1988) ou na cultura escolar, como nos demais estudos (Cortez, Vergnaud & Kavafian, 1990, Meira, 1996, Lessa, 1996). Deve-se considerar ainda as limitações existentes no modelo como o impossibilidade de representar valores negativos. Como Lessa (1996) indica:

> “não é o uso da balança como material concreto, e sim a utilização de situações significativas na balança e a relação significativa entre a situação concreta e a situação formal da expressão, que favorecem a compreensão dos aspectos relevantes da álgebra” (p. 28).

Ao concluir a revisão desses estudos, surge um questionamento sobre a validade de desenvolver um software para representar a balança no computador. Qual a vantagem de se utilizar o computador para representar um artefato físico existente e de reconhecida utilidade como suporte didático para o ensino de álgebra? A resposta é que se o software apenas reproduzir o modelo de balança não há vantagem alguma. O software pode partir de uma situação familiar ou facilmente identificável pelos alunos mas deve possibilitar ampliações sobre o modelo da balança de dois pratos a fim de permitir o estabelecimento de uma ligação entre os conhecimentos intuitivos da criança e os conhecimentos formais que a escola deseja alcançar. Na próxima seção descreveremos o ambiente "Balança Interativa" e discutiremos que característica apresentam vantagens em relação ao uso da balança de dois pratos.

Balança Interativa[2]

Na tela do "Balança Interativa" (figura 1), desenhos de sacos com letras representadm pesos desconhecidos, enquanto desenhos de sacos com números pesos conhecidos, com valores de um até nove.

INSERIR FIGURA 1 +/- AQUI

O jogo consiste em descobrir os valores associados aleatoriamente às letras. A aluno deverá utilizar o software para pesar os pesos conhecidos e desconhecidos, compará-los e chegar a conclusões sobre os valores dos pesos desconhecidos. A cada vez que os pesos são colocados em qualquer dos pratos, a balança pode apresentar um equilíbrio quando os pesos dos dois lados da balança são iguais ou um desequilíbrio quando os pesos são diferentes. Nesse caso, são possíveis duas configurações, o prato da direita ser mais pesado (e o da esquerda mais leve) e o prato da esquerda ser mais pesado (e o da direita mais leve). Estabelecendo combinações de igualdade e desigualdade o aluno pode encontrar o valor de pesos desconhecidos e digitar esse valor na caixa de texto embaixo da letra que corresponde ao peso. Caso esteja correto, o programa aceita o valor. No caso de entrar uma resposta errada, o programa registra esse erro e a caixa permanece em branco.

O jogo é dividido em cinco níveis de dificuldade. No nível um, o aluno tem pesos desconhecidas (letras) que variam de 1 a 9 e pesos conhecidos (números) que variam também de 1 a 9. Nesse primeiro nível, os alunos podem resolver os problemas por mera tentativa e erro, ou seja colocando um peso desconhecido em um dos pratos e testando todos os possíveis

[2] Vale apontar que existem citar dois software comerciais que utilizam-se da analogia com a balança para trabalhar conceitos matemáticos. No Balancing Bear (sunburst, 1993) ou urso equlibrista, o usuário deve equilibrar uma haste usando pesos conhecidos em ambos os lados. O objetivo é levar o aluno a perceber o resultado de operações de soma. No Jogo da Balança (Luca, 1996), o objetivo também é equilibra a balança retirando ou colocando objetos em ambos os pratos. Em ambos os software, há uma ênfase sobre a utilização de estratégias aritméticas, pois não há pesos desconhecidos a serem descobertos. Além disso, os software não permitem manipular os pesos através do mouse, apenas através de botões, o que os afasta de um modelo físico da balança de dois pratos.

valores que ele pode apresentar. O objetivo maior é introduzir o aluno ao funcionamento do programa, familiarizando-o com as regras gerais do Balança Interativa com os locais aonde colocar informações e receber feedback.

No nível dois, os pesos desconhecidos variam de 1 a 20, enquanto os pesos conhecidos variam de 1 a 9. Nesse segundo nível, o o aluno não poderá encontrar os pesos diretamente e terá que fazer associações entre pesos para descobri-los, principalmente quando os pesos são maiores do que 9. O objetivo é levar o aluno a perceber de que mais de um peso pode ser colocado no prato da balança.

Nos níveis três, quatro e cinco, o aluno possui respectivamente 7, 5 e 3 pesos conhecidos. O valor dos pesos desconhecidos nesses níveis varia de 1 a 9. O objetivo é levar o aluno a utilizar estratégias subtrativas para encontrar os pesos. Por exemplo, se os valores dos pesos conhecidos são 3, 7 e 9, o aluno pode colocar os pesos 3 e 7 em pratos diferentes da balança e encontrar o peso desconhecido 4 quando a mesma estiver equilibrada.[3]

O software apresenta uma série de vantagens com relação à utilização da balança de pratos. Em primeiro lugar, os estudos anteriormente realizados sobre a utilização da balança, enfatizavam a situação de igualdade (Carraher e Schliemann, 1988, Cortez, Vergnaud & Kavafian, 1990, Meira, 1996, Lessa, 1996). Nesses estudos, os sujeitos eram sempre apresentado a uma balança ou a um desenho da balança em equilíbrio e solicitado a tirar conclusões sobre a incógnita a partir da igualdade dos pratos. No software Balança Interativa, essa relação de igualdade é estabelecida de maneira mais ampla, pois é tratada como um caso particular de comparações (relações) que envolvem três possibilidades (maior, menor ou igual). Portanto, a noções de equação e inequação podem ser desenvolvidas simultaneamente ao invés de serem tratados como tópicos independentes no currículo.

Esse tipo de raciocínio pode ser realizado em uma balança de dois pratos. É provável até que os feirantes do estudo de Carraher e Schliemann (1988) tivessem alguma noção dessas relações de igualdade e desigualdade, embora os autores não a tenham explorado. Entretanto, nas situações cotidianas, o objetivo é sempre atingir o equilíbrio. Já no software Balança Interativa, o objetivo não é equilibrar, mas descobrir os pesos desconhecidos, o que algumas vezes pode ser atingido através do desequilibro. Por exemplo, se o aluno colocar os pesos A e 2 nos pratos da balança, pode concluir que $A < 2$. Como no contexto do software, os valores

---

[3] A versão 2.0, em fase de implementação, possui outros níveis nos quais o aluno faz manipulações de forma puramente simbólica.

são todos inteiros, o aluno pode usar esse resultado para descobrir que A = 1, sem ter que colocar os pesos A e 1 na balança.

Uma outra diferença entre os estudos anteriores sobre o uso da balança de dois pratos e o Balança Interativa é que enquanto nos estudos as equações já eram dadas prontas aos sujeitos e os mesmos apenas tinham de resolvê-las, no software, as equações não estão prontas mas tem de ser construídas pelo aluno. Isso possibilita ao aluno dar mais significado à utilização da balança. A mesma se torna uma ferramenta para encontrar os pesos desconhecidos ao invés de resolver apenas uma determinada situação.

O software Balança Interativa apresenta um outro benefício com relação à balança de dois pratos para se trabalhar o desenvolvimento de noções algébricas. Numa balança de dois pratos, o desequilíbrio dos pratos dá alguma indicação da estimativa entre as diferenças de pesos, pois se colocarmos 5 e 3 nos dois pratos, teremos uma relação perceptual diferente do que se colocarmos 5 e 1 nos dois pratos. No software, os valores dos pesos desconhecidos não podem ser determinados por aproximação pois as relações de desigualdade são somente maior que e menor, não havendo nenhuma indicação perceptual do tamanho dessa relação. Portanto, ao colocarmos A e 5, se a balança informar que A>5, não pode ser determinado diretamente o valor de A ou concluir se esse valor é um pouco maior (6) ou muito maior (9). É preciso usar outras informações já encontradas ou encontrar novas informações manipulando a balança. Essa restrição do software afasta o uso de estimativas[4], e portanto de soluções aritméticas. O sujeito deve utilizar de um raciocínio preciso próximo do encontrado ao resolver inequações. Por exemplo, o aluno pode encontrar que B>3 e B<5 e utilizar esses dois fatos para concluir que B=5.

Uma outra vantagem do Balança Interativa sobre a manipulação de uma balança de dois pratos é que, no software, cada vez que um nível é iniciado os pesos desconhecidos podem assumir qualquer valor dentro do intervalo especificado. Isso leva o aluno a compreender que um mesmo símbolo (os pesos desconhecidos com letras) pode ter valores diferentes. Esse conhecimento é essencial na álgebra para se compreender a forma de representar incógnitas em equações e posteriormente variáveis em funções.

---

[4] Não queremos dizer que o uso de estimativas é indesejável na matemática. Ao contrário, o uso de procedimentos informais tem um valor documentado em pesquisas sobre o conhecimento matemático em situações cotidianas (Carraher, Carraher & Schliemann, 1988, Lave, 1988). Entretanto, na álgebra, o objetivo não é utilizar aproximações para calcular a incógnita imediatamente mas usar a manipulação simbólica para chegar ao resultado (Cortez, Vergnaud & Kavafian, 1990)

Essa situação pode ser realizada na manipulação de objetos físicos como sacos, caixas, vasilhas, em que pesos seriam colocados e retirados, apresentando, no entanto, duas restrições. Primeiro, ela é difícil de ser realizada rapidamente. Algum tempo teria que ocorrer para que os pesos dos depósitos pudessem ser modificados. Em segundo lugar, no uso cotidiano da balança, há uma tendência a reconhecer o peso dos objetos e a utilizar estimativas para encontrar o valor dos pesos. Um feirante experiente por exemplo, é capaz de realizar uma aproximação sobre a quantidade de um determinado produto. Essa diferença entre a estimativa e o raciocínio algébrico pode ser também analisada sob o ponto de vista da diferença entre conceitos espontâneos e científicos (Vygotsky, 1986) ou da diferença entre "manipulação de quantidades" e "manipulação simbólica" (Lave, 1988). O que se deseja não é eliminar a estimativa mas possibilitar que os alunos atribuam significados aos conceitos científicos ou à manipulação simbólica da mesma forma que o fazem com os conceitos espontâneos ou com a manipulação de quantidades.

Em resumo, o objetivo da Balança Interativa não é reproduzir a situação da balança de dois pratos. O programa simula elementos encontrados no mundo físico ao mesmo tempo que cria restrições, como o feedback na forma de maior, menor ou igual, e ampliações como a manipulação simbólica, que permitem o estabelecimento uma ligação o pensamento aritmético e o algébrico. Como Carraher (1992) sugere, o objetivo de um software educativo é possibilitar a realização de atividades que constituem atividades especiais para aprender e que "seriam difíceis ou até impossíveis de acontecer sem o computador" (p. 181).

Uma última característica do software é que ele registra o número de erros que o aluno cometeu ao atribuir os valores e o número de vezes que os pesos foram colocados nos pratos da balança (número de movimentos). Esses elementos podem ser utilizados como situações didáticas. Para evitar cometer erros, o aluno deverá refletir e ter certeza de que o valor atribuído a uma letra é correta. Isso evita o uso de estimativas ou de resposta por tentativa e erro. Uma outra situação didática consiste em solicitar que o aluno responda o problema com o menor número de movimentos. Isso leva ao desenvolvimento de uma série de estratégias, as quais têm sido observadas na aplicação do programa. As mesmas serão detalhadas a seguir.

Estratégias encontradas em professores e alunos

Na fase atual de nossa pesquisa, temos realizados entrevistas e observações com alunos do ensino fundamental, alunos do curso de pedagogia (Silveira, em progresso) e professores-alunos do curso de especialização em Informática Educativa da Universidade Federal do

Ceará. Na utilização do programa, temos observado o surgimento das estratégias descritas a seguir[5]:

Estratégia da busca pela metade

Essa estratégia consiste em a cada teste, iniciar pelo valor que representa a metade dos pesos desconhecidos buscados. Isso consiste em no primeiro nível do jogo, colocar sempre um peso desconhecido (A, por exemplo) de um lado da balança e o peso 5 do outro lado. Assim, sabe-se de antemão que se o peso desconhecido é maior, igual ou menor que 5. Se o peso desconhecido for maior que 5, ele só poderá assumir os valores 6 a 9 e se o peso desconhecido for menor que 5, ele só poderá assumir os valores de 1 a 4. Se encontrar que o peso é menor que 5, por exemplo, o próximo peso a ser testado poderia ser o 2 ou o 3. Essa estratégia reduz pela metade o número de testes para encontrar o valor do peso desconhecido. Embora essa estratégia ainda possa ser considerada um raciocínio aritmético, ela representa uma base para compreender algoritmos de busca em linguagens de programação.

Teste do valor intermediário

Uma estratégia que representa uma refinamento da estratégia anterior é o uso do valor intermediário quando apenas três valores são possíveis para o peso. Uma situação em que esta estratégia pode ser utilizada está ilustrada na figura 2.

INSERIR FIGURA 2 +/- AQUI

Observa-se que o peso desconhecido F é maior que 5 e uma vez que o peso 8 já corresponde ao peso desconhecido B, F pode assumir apenas três valores, 6, 7 e 9. A estratégia de valor intermediário consiste em comparar o peso desconhecido com o do valor intermediário, no caso 7. Se F for igual a 7, a balança ficará em equilíbrio. Se F for maior que 7, F será igual a 9 e se for menor que 7, F será igual a 6. Com o uso dessa estratégia, o valor do peso desconhecido pode ser encontrado em apenas um teste. A utilização dessa estratégia comprova que o aluno não está preocupado meramente em usar a balança para testar as respostas, mas realiza um planejamento que requer a construção de equações, inequações e hipóteses afim de otimizar o número de movimentos.

---

[5] Gostaria de agradecer a ajuda dos alunos do Curso de Especialização em Informática Educativa pelas discussões e relatórios escritos que propiciaram a documentação de algumas dessas estratégias.

Estratégias subtrativas

O modelo da balança não possibilita o uso de subtração diretamente visto que não faz sentido falar-se de pesos com valores negativos. O uso da subtração consiste em verificar que acrescentar um peso em um prato da balança é equivalente a subtrair um peso do mesmo valor no outro prato da balança. Por exemplo, o aluno pode encontrar o equilíbrio, possuindo os pesos B e 6 num dos pratos e o peso 7 no outro prato e utilizar essa informação para concluir que B é igual a 1 (ver figura 3).

INSERIR FIGURA 3 +/- AQUI

Nos níveis 4 e 5, essa estratégia é essencial para solucionar os problemas visto que nem todos os pesos conhecidos que faltam nesses dois níveis podem ser obtidos por meio da combinação (soma) de outros pesos conhecidos disponíveis. Por exemplo, na situação inicial do nível 4 mostrado na figura 4, os pesos 1, 4 e 7 não podem ser obtidos por soma de outros pesos, mas devem ser obtidos por subtração. O peso 7, pode ser obtido colocando-se os pesos 2 e 9 em pratos opostos da balança.

INSERIR FIGURA 4 +/- AQUI

Essa estratégia já é documentada nos estudos anteriores sobre a balança de dois pratos (Lessa, 1996), correspondendo ao conhecimento de que retirando quantidades iguais dos dois lados, a igualdade não se altera. A diferença é que no Balança Interativa, essa estratégia é também utilizada quando a relação não é de igualdade. Por exemplo, o seguinte raciocínio foi observado em um dos professores-alunos do curso de especialização:

> "Se de um lado da balança tem 7 e do outro lado tem A+2, que relação o aluno pode fazer? Sabendo-se que 7 é mais pesado que A + 2, então pode-se deduzir que 7 > A + 2. Se A fosse igual a 2, implica que A=5, portanto A deve ser menor que 5 e estar entre 1 e 4"(Vera[6], reflexões sobre a utilização do Balança Interativa).

Essa generalização de uma igualdade para uma desigualdade demonstra que o sujeito está pensando em termos de relações entre os valores no prato e não apenas buscando o equilíbrio ou igualdade.

Uso de pesos com letras

Essa estratégia consiste em utilizar os pesos com letras após seu valor ter sido descoberto. Ao descobrir-se o valor de algum peso desconhecido, o mesmo pode ser utilizado para testar

[6] Pseudônimo.

outros pesos. Por exemplo, na figura 5, verifica-se que $C+A<D$. Uma vez que A=2 e C=3, pode-se concluir que $5<D$.

INSERIR FIGURA 5 +/- AQUI

Essa estratégia é bastante utilizada nos níveis 4 e 5 em que há poucos pesos conhecidos disponíveis. Embora essa estratégia assemelhe-se ao uso de pesos conhecidos, ele aproxima-se do raciocínio utilizado em sistemas de equações com mais de uma incógnita em que encontra-se os valores de algumas incógnitas e faz-se uma substituição para encontrar os valor das demais incógnitas. Isso leva o aluno a se familiarizar com a manipulação de incógnitas, assemelhando-se a solução de sistemas de equação. Assim, o aluno poderá ter uma equação do tipo B+5=D, e já tendo encontrado que D=7, concluir que B=2.

Combinação de estratégias

O uso dessas estratégias podem algumas vezes aparecer combinados. Por exemplo, na situação ilustrado na figura 6, tem-se que $F>2$. Com base nos valores anteriormente determinados, pode-se concluir que F somente pode ser 5, 6 ou 8, uma vez que os outros valores maiores que 2 já foram determinados. A estratégia do valor intermediário sugere comparar F com 6. Para se obter 6, coloca-se E no prato da balança em que já se encontra o peso 2, comparando-se então E+2 com F, correspondendo à estratégia do uso de pesos com letras. Uma vez que já se havia determinado anteriormente que E=4, E+2 é equivalente a 6. Se E+2 for igual a F, F=6. Se $E+2>F$, F=5 e se $E+2<F$, F=8.

INSERIR FIGURA 6 +/- AQUI

Essas estratégias nem sempre surgem espontaneamente. Ao iniciarem os níveis 4 e 5, muitos alunos colocam que eles são impossíveis de serem resolvidos pois faltam muitos pesos. No entanto, após a sugestão ou demonstração do pesquisador de que pesos podem ser obtidos através da subtração, os sujeitos passam a utilizar essa estratégia. Essa intervenção é importante e demonstra que não pode-se esperar que o software sozinho seja suficiente para a aprendizagem dos conceitos matemáticos. O software ou qualquer outra ferramenta deve estar inserida num contexto em que significados possam ser atribuídos ao seu uso (Meira, 1996).

A observação do surgimento e utilização dessas estratégias demonstra que os alunos não estão encontrando os valores por mera tentativa e erro. Ao contrário, elas mostram que os alunos estão elaborando princípios que serão importantes quando da introdução de formas de representações algébricas mais formais.

Discussão

Normalmente, a solução proposta as dificuldades com álgebra, envolve atrasar o estudo desses conceitos e só introduzi-los posteriormente acreditando que os alunos estarão mais “maduros” ou prontos para entendê-los. A idéia é que os alunos precisam estar bem preparados no domínio da aritmética para só então compreender a álgebra. Essa abordagem foi influenciada pela posição piagetiana de que o aprendizado é subordinado ao desenvolvimento de estruturas mentais de pensamento (Spinillo, 1993). Por esse motivo, a álgebra só deveria ser introduzida após os alunos iniciarem os período das operações formais.

Nesse trabalho, discutimos uma proposta que segue uma direção inversa. Em outras palavras, ao invés de esperar e só introduzir esses conceitos no ensino médio ou na universidade, defendemos que os alunos podem desenvolver noções intuitivas acerca de álgebra a partir das séries iniciais do ensino fundamental. Mais do que isso, argumentamos que o ensino da aritmética já deve trazer consigo os fundamentos da álgebra. Dessa forma, o que deve ser ensinado mais cedo não é necessariamente as idéias mais fáceis ou simples, mas os conceitos que servirão de base para compreensão de idéias avançadas como álgebra e cálculo. Ao antecipar esse trabalho, os alunos estarão muito mais prontos para entender esses conceitos num nível de representação mais abstrato, estabelecendo ligações entre as representações simbólicas e as mais intuitivas já desenvolvidas pelos alunos.

Diversos autores têm afirmado que conceitos matemáticos mais complexos devem ser introduzidos desde cedo na escolar, os mesmo sendo abordados de forma intuitiva, sem esperar que os alunos tornem-se aptos a entender esses conceitos plenamente (Spinillo, 1993, Confrey & Smith, 1991, Kaput, 1994). Araújo, Lima, Da Rocha Falcão, Lessa, Oliveira e Leitão (2000) e Pinto (em progresso) realizaram estudos sobre uma seqüência didática para introduzir alunos de 2ª, 3ª. e 4ª. série a algumas das idéias fundamentais da álgebra. Seus resultados apontam que é possível introduzir um tipo de pensamente algébrico desde cêdo, em paralelo com o estudo da aritmética. Gimenez e Lins (1997) também defendem que aritmética e álgebra devam ser ensinadas conjuntamente, desde o início dos anos escolares. Lessa (1996) afirma que:

> “A passagem da aritmética a álgebra deve ser tratada num contexto onde sejam consideradas os aspectos de ruptura, e também os aspectos de continuidade em relação à aritmética” (p. 17).

Referências

Araújo, C. R., Lima, A. P. B., Da Rocha Falcão, J., Lessa, M. M. L., Oliveira, M e Leitão, S. (Julho, 2000). Negociando a construção de significados no contexto de atividades de interação didática envolvendo alunos e professor. Trabalho apresentado no III Conference for Sociocultural Research. Unicamp, São Paulo.

Baulac, Y., Belleiman, F, & Laborde, J.-M. (1990). Cabri-géomètre© [Programa de Computador]. Berlin: Cornelsen.

Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (1987). Manipulating equivalences in the market and in maths. Proceeding of the XIth International Conference of the Psychology of Mathematics Education, Montreal.

Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (1988). Álgebra na feira. Em Carraher, T. , Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (orgs.). Na vida Dez na Escola Zero. São Paulo: Cortez.

Carraher, D.W. (1992). A aprendizagem de conceitos com o auxílio do Computador. Em Alencar, M.E. Novas Contribuições da Psicologia aos Processos de Ensino-Aprendizagem. São Paulo, Cortez Editora.

Carraher, T. , Carraher, D.W. & Schliemann, A.D. (1988). Na vida Dez na Escola Zero. São Paulo: Cortez.

Castro-Filho, J. (2000). Teachers, Math and Reform: An investigation of Learning in Practice. Unpublished doctoral dissertation. University of Texas at Austin.

Castro-Filho, J., Confrey, J. (1998, April). Technology, professional development and systemic reform: a pilot study on how to integrate those perspectives. in Confrey, J (Chair), Researching Systemic Change in Mathematics Education Using New Technologies: a Research Team's Growing Pains. Interactive Symposium conducted at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA.

Castro-Filho, J., Confrey, J., Wilhelm, J., and Meletiou, M. (1999). Using Interactive Diagrams as a Means to Promote Deeper Content Knowledge by Students and Teachers. In D. Thomas (Ed.). Proceeding of M/SET 99 [CD-ROM]. San Antonio, Texas: Association for the Advancement of Computing in Education.

Confrey, J. (1992). Using computers to promote students' inventions on the function concept. In S. Malcom, L. Roberts, & K. Sheingold (eds.). The year in school science 1991. (pp. 141-174). Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

Confrey, J. (1992). Using computers to promote students' inventions on the function concept. In S. Malcom, L. Roberts, & K. Sheingold (eds.). The year in school science 1991. (pp. 141-174). Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

Confrey, J. (1994). Six approaches to transformations of functions using multi-representational software. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.) Proceeding of the eighteen Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol II (pp. 217-224). Lisboa, Portugal: GRAFIS, coop. de artes graficas, CRL.

Confrey, J. (1994a). Voice and perspective: hearing epistemological innovation in students' words. Revue des Sciences de L'education, 20(1), pp. 115-133.

Confrey, J. , Castro-Filho, J., and Maloney, A. (1997). Interactive diagrams: A new learning tool. In Dossie, J. A. , Swafford, J. O. , Parmantie, M. , and Dossey, A. E. (Eds.) Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Confrey, J. , Castro-Filho, J., and Maloney, A. (1998). Interactive Diagrams: Exploring the potential of Java Applets for Learning Mathematics. (Trabalho publicado On-line). Disponível em www.eoe.org.

Confrey, J. e Smith, E. (1994) Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. Educational Studies in mathematics, 26, 135-164.

Confrey, J., Castro-Filho, J. and Wilhelm, J. (2000). Implementation Research as a Means to Link Systemic Reform and Applied Psychology in Mathematics Education. Educational Psychologist, 35(3), 179-191.

Cortes, A., Kavafian, N. and Vergnaud, G. (1990). From arithmetic to algebra: Negotiating a jump in the learning process. Proceeding of the fourteenth International Conference on the Psychology of Mathematics Education, pp 27-34, Mexico.

Da Rocha Falcão, J. T. (1993). A álgebra como ferramenta de representação e resolução de problemas. Em Schillieman, A.D, Carraher, D.W., Spinillo, A.G., Meira, L.L, & Da Rocha Falcão, J.T. (orgs) Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Ed. Universitária da UFPE.

Da Rocha Falcão, J. T. (1995). A case study of algebraic scaffolding: from balance scale to algebraic notation. In Meira, L. and Carraher, D. W. (eds.). Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. Vol 2 (pp 66-73) Recife: PE. Editora Atual ltda.

Dennis, D. & Confrey, J. (1997). Drawing logarithmic curves with Geometer' s Sketchpad: A method inspired by historical sources. In J. R. King, and D. Shattschneider, (eds.). Geometry turned on. (pp. 147-156). Washington: DC: The Mathematical Association of America.

Filloy, E. and Rojano, T. (1984). From an arithmetical thought to an algebraical thought: A clinical study with 12-13 year olds. Proceedings of the sixth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, pp 51-6. Winsconsin: EUA.

Gimenez, J. e Lins, R. C. (1997). Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI. Campinas, SP: Papirus Editora.

Holzl, R. (1996). How does 'dragging' affect the learning of geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning 1: 169-187.

Kaput, J. (1994). Democratizing access to calculus. In A. Schoenfeld (Ed.), Mathematical thinking and problem solving. (pp. 77-156). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

King, J. R (1997). An eye for similarity transformations. In J. R. King, and D. Shattschneider, (eds.). Geometry turned on. (pp. 109-120). Washington: DC: The Mathematical Association of America.

Lave, J. (1988). Cognition in Practice: Mind, Mathematics, and culture in everyday life. Cambridge: Cambridge University Press.

Lessa, M.M.L. (1996). Balança de dois pratos e problemas verbais como ambientes didáticos para iniciacão à álgebra: um estudo comparativo. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife: PE.

Luca (1996). Jogo da Balança [Programa de Computador]. Positivo Informática.

Marshall, G. (1993). Balancing Bear [Programa de Computador]. Sunburst Communications.

Meira, L. (1996). Atividade algébrica e produção de significados em matemática: Um estudo de caso. Em Dias, M.G.B.B. e Spinillo, A.G. (orgs.). Tópicos em Psicologia Cognitiva. Recife: Editora Universitária da UFPE.

Papert, S. (1994). A Máquina das Crianças. Porto Alegre: Artes Médicas.

Pinto, G.A.T. (em progresso). A atribuição de significado em atividades pré-algébricas por crianças da segundo ano do primeiro ciclo do ensino fundamenta. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco, Recife: PE.

Schliemann, A.D., Lima, A.P.A.B. & Santiago, M.M.L. (1992). Understanting equivalences through balance scales. Proceeding of the sixteenth International Conference of the Psychology of Mathematics Education, Durhan, New Hampshire.

Silveira, M. J. A. (em progresso). *Novas Tecnologias para o ensino de matemática.* Projeto de Iniciação Científica. PIBIC-UFC.

SPAECE (1998) Relatório final. Universidade Federal do Ceará, Departamento de Fundamentos da Educação. Fortaleza, CE.

Spinillo, A. G. (1993) Proporções nas Séries Iniciais do Primeiro Grau. Em Schillieman, A.D, Carraher, D.W., Spinillo, A.G., Meira, L.L, & Da Rocha Falcão, J.T. (orgs) Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Ed. Universitária da UFPE.

Valente, J.A. (Org.) (1998). Computadores e Conhecimento: repensando a educação. Campinas, UNICAMP/NIED.

Vergnaud G. (1985) Concetpts et schèmes dans une theorie opératorie de la représentation. Psychologie Française, 30, 245-52.

Vergnaud G. (1997) Algebra, additive and multiplicative structures. Is there any coherence at the early secondary level? In M. Hejný e J. Novotná (eds.) Actes du colloque European Research Conference on Mathematical Education, Charles University, Podebrady, pp. 33-45.

Vergnaud, G. and Cortez, A. (1986). Introducing algebra to “low-level” 8th and 9th graders. Proceedings of the tenth Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education., pp. 319-324, London.

Vygotsky, L.S. (1984). A formação social da mente. São Paulo: Martins Fontes.

Vygotsky, L.S. (1986). Pensamente e Linguagem. São Paulo: Martins Fontes.

Wilhelm, J. Confrey, J., Castro-Filho, J., and Maloney, A. (1999). Interactive diagrams to address key student conceptions in mathematics. In D. Thomas (Ed.). Proceeding of M/SET 99 [CD-ROM]. San Antonio, Texas: Association for the Advancement of Computing in Education.

FIGURAS

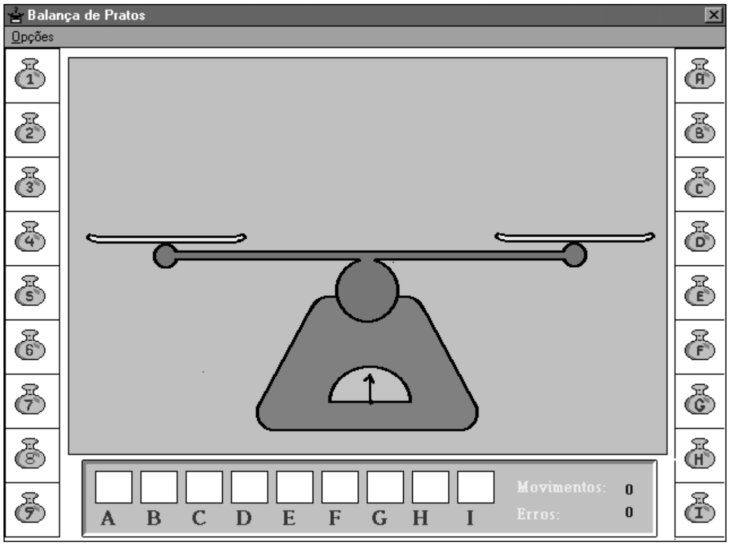

Figura 1 – Tela Inicial do Balança Interativa

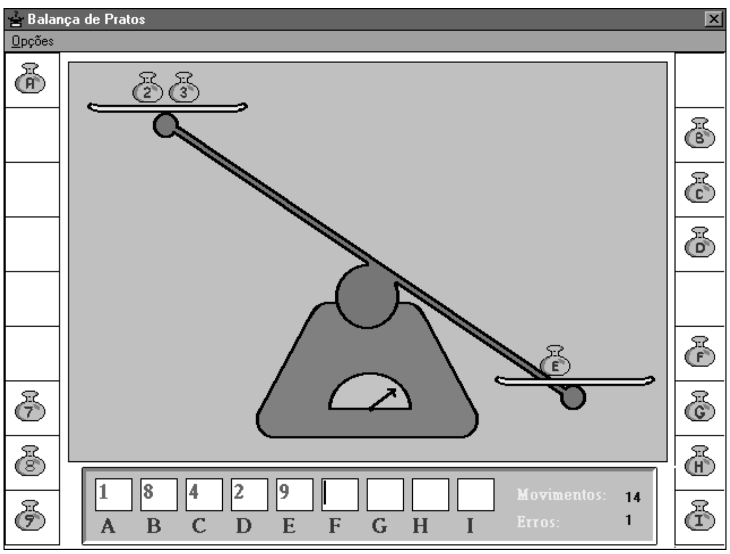

Figura 2 – Tela do Balança Interativa na estratégia de teste do valor intermediário

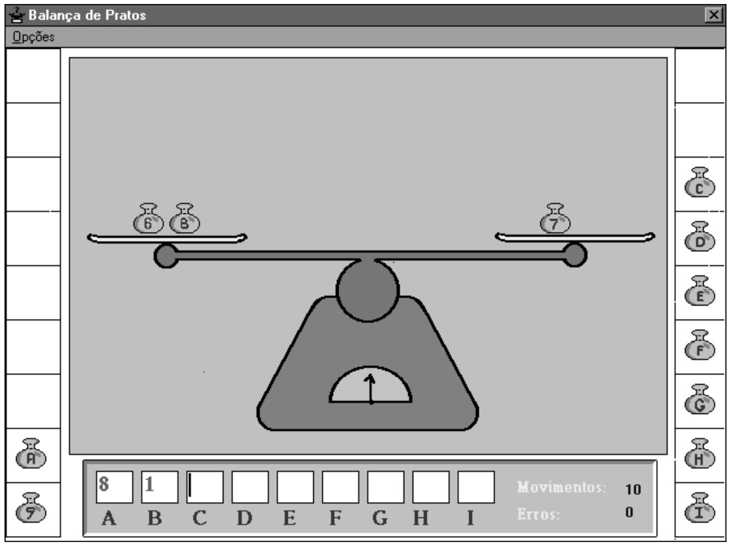

Figura 3 – Tela do Balança Interativa com a estratégia subtrativa

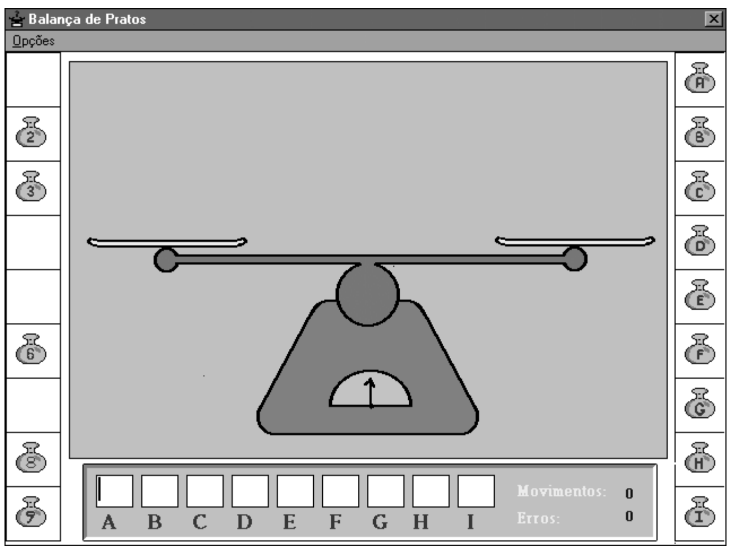

Figura 4 – Tela inicial do nível 4.

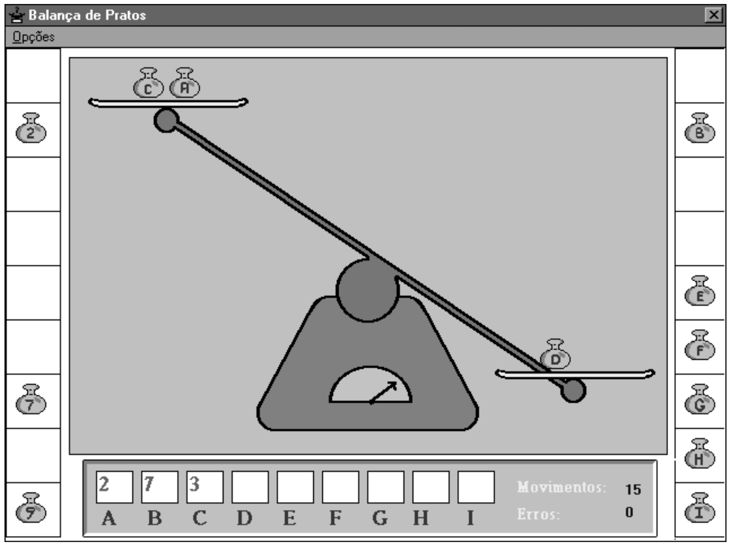

Figura 5 – Tela do Balança Interativa com a estratégia de uso de pesos com letras.

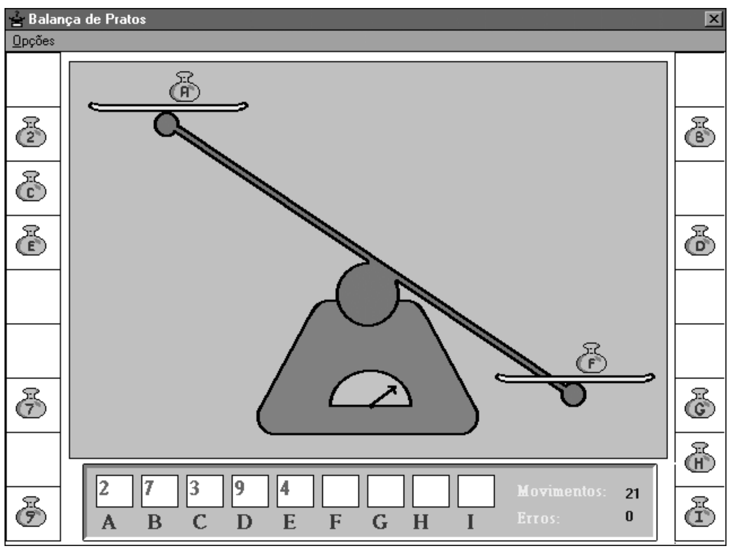

Figura 6 – Tela do Balança Interativa com combinação de estratégias.